ĆWICZENIA 3 – TEORIA **(**Funkcja jednej zmiennej, własności)

Przykład : Obliczyć wartość funkcji $f(x)=\sqrt{x+2}-\frac{\sqrt{x}}{x-2}$ dla x=1 oraz x=4.

$$f(1)=\sqrt{1+2}-\frac{\sqrt{1}}{1-2}=\sqrt{3}-\frac{1}{(-1)}=\sqrt{3}+1$$

$$f(4)=\sqrt{4+2}-\frac{\sqrt{4}}{4-2}=\sqrt{6}-\frac{2}{2}=\sqrt{6}-1$$

Przykład : Znaleźć miejsca zerowe funkcji y = f(x) =x^2 -9.

Zauważ, że y = f(x) =x^2 -9 = (x-3)(x+3).

Miejscem zerowy nazywamy każdy punkt x, dla którego f(x)=0.

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-9=0$$

(x-3)(x+3)=0 dla x=3 lub x=-3

Miejscami zerowymi powyższej funkcji są x=3 lub x=-3.

DZIEDZINA FUNKCJI

UWAGA Pamiętaj o następujących zasadach określania dziedziny funkcji:

1) Wyrażenie pod pierwiastkiem stopnia parzystego jest nieujemne, czyli np. dla $\sqrt{1-x}$, $1-x\ge 0$, stąd $x\le 1$.
2) W wyrażeniu logarytmicznym podstawa logarytmu musi być większa od 0 i różna od 1, a wykładnik większy od 0, np. dla $\log_{(x^2-2)}(x+5)$, $x^2-2>0$ oraz $x^2-2\ne 1$, a $x+5>0$
3) W wyrażeniach typu $\frac{x+2}{x^2-4}$, w mianowniku nie może być 0, czyli $x^2-4\ne 0$

Przykład : Wyznaczyć dziedzinę funkcji $f(x)=\sqrt{x-2}\log_{x-1}\frac{x^2+2}{x+7}$.

1) $x-2\ge 0 \Rightarrow x>2$
2) $x-1>0 \Rightarrow x>0$ i $(x-1)\ne 1 \Rightarrow x\ne 2$ zatem $x\in(0,2)\cup(2,\infty)$
3) Korzystając z faktu, że znak ilorazu dwóch funkcji jest taki sam jak znak ich iloczynu mamy, że:
$$\frac{x^2+2}{x+7}>0 \Rightarrow \underbrace{(x^2+2)}_{zawsze\ >0}(x+7)>0 \Rightarrow (x+7)>0 \Rightarrow x>-7$$
4) $x+7\ne 0 \Rightarrow x\ne -7$

Wybieramy x spełniające jednocześnie warunki 1), 2), 3) i 4). Zatem $D=(2,\infty)$

ĆWICZENIA 3 – TEORIA (Funkcja jednej zmiennej, własności)

Przykład : Wyznaczyć dziedzinę funkcji $f(x)=\dfrac{\sin x}{x-1}$. $D \subset \mathbf{R}/\{1\}$

Przykład: Uzasadnić, że funkcja $f(x)=\sqrt{x}+1$ jest różnowartościowa.

Mamy pokazać, że $\forall_{x_1,x_2\subset D}(x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))$. Bez straty ogólności rozważań, niech $x_1 < x_2$. Jeżeli $x_1, x_2 \geq 0$, to $0 \leq x_1 < x_2$ i $x_2 - x_1 > 0$. Wówczas dla $f(x_1)=\sqrt{x_1}+1$ i $f(x_2)=\sqrt{x_2}+1$ mamy $f(x_2)-f(x_1)=\sqrt{x_2}+1-\left(\sqrt{x_2}+1\right)=\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}>0$, zatem $f(x_1) \neq f(x_2)$. Podobnie rozważyć dla $x_1, x_2 \leq 0$ oraz dla $x_1 \geq 0$ $x_2 \leq 0$.

Przykład: Sprawdzić, czy dana funkcja jest parzysta: $f(x)=\dfrac{3x^2}{(x-2)(2+x)}$.

$f(-x)=\dfrac{3(-x)^2}{(-x-2)(2+(-x))}=\dfrac{3x^2}{\left((-x)^2-2^2\right)}=\dfrac{3x^2}{(x-2)(2+x)}=f(x)$. Funkcja parzysta.

Przykład: Sprawdzić, czy funkcja $f(x)=x^3$ jest rosnąca: w **R**.

Niech $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 < x_2$.

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2)^3-(x_1)^3=(x_2-x_1)\left[(x_2)^2+x_1x_2+(x_1)^2\right]$$

Zauważmy, że pierwszy czynnik jest dodatni, a drugi nieujemny (równy 0 dla $x_1, x_2 = 0$). Stąd $f(x_2)-f(x_1)>0$, co oznacza, że funkcja jest rosnąca.

Przykład: Sprawdzić, czy funkcja $g(x)=\dfrac{1}{x}$ jest malejąca $(0,\infty)$ w **R**.

Niech $x_1, x_2 \in (0,\infty)$, $x_1 < x_2$.

$g(x_2)-g(x_1)=\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{x_1-x_2}{x_1x_2}<0$, gdyż licznik ułamka jest ujemny, a mianownik dodatni.

Zatem g jest malejąca w rozważanym przedziale.

Przykład: Określić funkcje złożone $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$, jeżeli $f(x)=4+\sin x$, $g(x)=\sqrt{x}$.

$$(f \circ f)(x)=f(f(x))=f(4+\sin x)=4+\sin(4+\sin x)$$

$$(f \circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\sqrt{x}\right)=4+\sin\left(\sqrt{x}\right)$$

$$(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(4+\sin x)=\sqrt{(4+\sin x)}$$

$$(g \circ g)(x)=g(g(x))=g\left(\sqrt{x}\right)=\sqrt{\sqrt{x}}=\sqrt[4]{x}$$

ĆWICZENIA 3 – TEORIA (Funkcja jednej zmiennej, własności)

FUNKCJA ODWROTNA

Przykład

- Przypisanie numeru PESEL każdemu (żyjącemu) Polakowi można odwrócić w naturalny sposób: znajdując Polaka według numeru PESEL.
- Funkcją odwrotną do funkcji liczbowej danej wzorem $y(x) = 3x$ jest funkcja $x(y) = \frac{y}{3}$.
- Funkcją odwrotną do funkcji danej wzorem $h(x) = \frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$ jest ona sama, tzn. $h^{-1}(x) = \frac{1}{x}$.

Przykład

Zbudujemy funkcję odwrotną do funkcji określonej wzorem $f(x) = 2x - 6$.

Funkcja f^{-1} określona jest przez wzór $x = 2y - 6$

(w napisie $y = 2x - 6$ zamieniliśmy rolami

zmienne). Po wyliczeniu y mamy $y = x/2 + 3$. Zatem $f^{-1} = x/2 + 3$