

WEKTORY WŁASNE I WARTOŚCI WŁASNE

1. Korzystając z definicji sprawdź, czy podane wektory są wektorami własnymi wskazanych macierzy:

$$(a) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(b) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(c) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$(d) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Wyznacz wartości własne i wektory własne podanych macierzy:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (e) \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (f) \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(g) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (h) \begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Odp. (a) $\lambda_1 = 3 \rightarrow [1, 1]^T$, $\lambda_2 = 0 \rightarrow [-2, 1]^T$

(b) $\lambda_1 = 2 \rightarrow [1, 5/4]^T$, $\lambda_2 = 3 \rightarrow [1, 1]^T$

(c) $\lambda_1 = 3 \rightarrow [1, 0, 0]^T$

(d) $\lambda_1 = 0 \rightarrow [1, -2, 0]^T$, $\lambda_2 = 3 \rightarrow [0, 0, 1]^T$

(e) $\lambda_1 = 3 \rightarrow [1, 0, 1]^T; [2, 1, 0]^T$

(f) $\lambda_1 = 1 \rightarrow [-1, 1]^T$, $\lambda_2 = 5 \rightarrow [3, 1]^T$

(g) $\lambda_1 = 2 \rightarrow [1, 2, 0]^T; [0, 0, 1]^T$

(h) $\lambda_1 = -2 \rightarrow [-1, -1, 1]^T$, $\lambda_2 = 0 \rightarrow [1, -1, 1]^T$, $\lambda_3 = 4 \rightarrow [-1, 1, 1]^T$

3. Pokaż, że suma wartości własnych jest równa śladowi macierzy (dla macierzy z zadania 2).

4. Pokaż, że iloczyn wartości własnych jest równy wyznacznikowi macierzy (dla macierzy z zadania 2).