Ćwiczenia 9

ELEMENTY RACHUNKU PRAWDOPODOBIEŃSTWA I ZMIENNA LOSOWA CIĄGŁA

1. Rzucamy dwa razy kostką. Określamy zdarzenia:
   A – w obu rzutach nie wypadnie szóstka
   B – w obu rzutach wypadną więcej niż trzy oczka
   Obliczyć prawdopodobieństwa zdarzeń A', $A \cap B$, $A \cap B'$.

   Odp. $P(A') = 11/36$, $P(A \cap B) = 4/36 = 1/9$, $P(A \cap B') = 21/36 = 7/12$

2. Rzucamy 10 razy monetą. Obliczyć prawdopodobieństwo, że co najmniej raz wypadnie orzeł.

   Odp. $P(A) = 1 - P(A') = 1 - 1/2^{10}$

3. Rzucamy raz monetą i kostką. Obliczyć prawdopodobieństwo wyrzucenia reszki lub co najmniej trzech oczek.

   Odp. $\frac{5}{6}$

4. W wesołym miasteczku jest karuzela o 10 jednakowych fotelikach i pociąg o 10 jednoosobowych wagonikach. Dwójka dzieci losowo zajmuje miejsca na karuzeli a potem w pociągu. Czy prawdopodobieństwo, że te dzieci będą sąsiadami na karuzeli, jest takie samo jak w pociągu?. Odpowiedź uzasadnić.

   Odp. Nie, bo: na karuzeli $\frac{2 \cdot 8! \cdot 10}{10!}$, w pociągu $\frac{2 \cdot 8! \cdot 9}{10!}$

5. Dziesięć książek ustawiamy losowo na jednej półce. Obliczyć prawdopodobieństwo, że trzy określone książki znajdą się obok siebie w ustalonym porządku.

   Odp. $\frac{8 \cdot 7!}{10!} = \frac{8!}{10!}$

6. Winda rusza z siedmioma pasażerami i zatrzymuje się na dziesięciu piętrach. Jakie jest prawdopodobieństwo, że każdy z pasażerów wysiądzie na innym piętrze?

   Odp. $\frac{10!/3!}{10^7}$

7. Dla jakiej wartości A funkcja

$$f(x) = \begin{cases} Ax^2 & \text{dla } 0 \le x < 4 \\ 0 & \text{dla } x < 0, x \ge 4 \end{cases}$$

jest funkcją gęstości pewnej zmiennej losowej X.

Odp. A= $\frac{3}{64}$

8. Dobierz stałą A tak, aby funkcja

$$f(x) = \begin{cases} Ae^{\frac{-x}{2}} & \text{dla } x \ge 0 \\ 0 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

była funkcją gęstości pewnej zmiennej losowej X, określającej czas bezawaryjnej pracy pewnego urządzenia w godzinach. Wyznacz prawdopodobieństwo, że urządzenie będzie pracować bez awarii co najmniej 3 godziny.

Odp. A= $\frac{1}{2}$; $e^{-\frac{3}{2}}$

9. Czas pracy urządzeń w pewnej fabryce jest zmienną losową o gęstości prawdopodobieństwa

Ćwiczenia 9

$$f(x)=\begin{cases}0{,}3(2+x-x^2) & \text{dla } 0\le x<2\\ 0 & \text{dla } x<0,\ x\ge 2\end{cases}$$

Wyznacz parametry rozkładu zmiennej losowej X. Wyznacz następujące prawdopodobieństwa P(|X-1|<0,5), P(|X-1|>0,5), P(X<1), P(X>3/2) korzystając z funkcji gęstości prawdopodobieństwa.

Odp. E(X)=0,8; D^2(X)=0,24

10. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa zmiennej X ma postać

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1+\frac{2}{3}x) & \text{dla } -1\le x<1\\ 0 & \text{dla } x<-1,\ x\ge 1\end{cases}$$

Jest to rozkład liniowy. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję.

Odp. E(X)= $\frac{2}{9}$; D^2(X)= $\frac{23}{81}$

11. Niech funkcja Γ będzie funkcją Eulera, wówczas dla n=1,2,... mamy $\Gamma(1)=1$, $\Gamma(n+1)=n!$ oraz $\Gamma(n+\frac{1}{2})=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$. Niech funkcja f(x) będąca funkcją gęstości prawdopodobieństwa ma postać $f(x)=\frac{\Gamma(3/2)}{\sqrt{2\pi}\Gamma(1)}\cdot(1+\frac{x^2}{2})^{-3/2}$ dla $x\in(-\infty,\infty)$. Jest to gęstość zmiennej o rozkładzie Studenta (o parametrze u=2). Oblicz wartość oczekiwaną dla tej zmiennej losowej.

Odp. E(X)= 0

12. Rozkład czasu oczekiwania statków na rozładunek określony jest funkcją gęstości

$$f(x)=\begin{cases}a, & 0<x\le 5 \text{ godzin}\\ 0, & x\le 0 \text{ lub } x>5.\end{cases}$$

a) Wyznaczyć stałą *a* tak, aby podana funkcja była gęstością zmiennej losowej X.
b) Obliczyć prawdopodobieństwo, że statek będzie oczekiwał na rozładunek od 2 do 4 godzin.
c) Obliczyć przeciętny czas oczekiwania, wariancję i odchylenie standardowe czasu.

Odp. a) 0,2; b) 0,4; c) 2,5; 2,08; 1,44

13. Niech dana będzie następująca funkcja:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{dla } x<3,\\ C & \text{dla } 3\le x\le 10,\\ 0 & \text{dla } x>10.\end{cases}$$

a) Dobrać stałą C tak, aby funkcja $f(x)$ była gęstością zmiennej losowej *X* i podać nazwę rozkładu zmiennej losowej X.
b) Obliczyć
   - prawdopodobieństwo tego, że zmienna losowa X przyjmuje wartości większe niż 5,
   - prawdopodobieństwo tego, że zmienna losowa X przyjmuje wartości co najwyżej 8 za pomocą gęstości prawdopodobieństwa.

   Wyniki wskazać na wykresie funkcji.
c) Obliczyć wartość oczekiwaną oraz wariancję.

Odp. a) 1/7; b) 5/7; 5/7 c) 13/2; 49/12