ĆWICZENIA 7, 8 – ZADANIA (Pochodna i jej zastosowania)

Zadanie 1. Wyrażenia nieoznaczone. Twierdzenie de L'Hospitala.

Sprawdź, czy: $\left(\left[\frac{0}{0}\right] \text{ i } \left[\frac{\infty}{\infty}\right]\right)$

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{x} = 2$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ i) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln\sqrt{x}}{x-1} = \frac{1}{2}$ m) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x} = \frac{3}{4}$

b) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\ln(\ln x)}{x} = 0$ f) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x} = 1$ j) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\ln x}{4x} = 0$ n) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{ctgx} = 0$ g) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{e^x}{x^3} = \infty$ k) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{5x} = \frac{3}{5}$ o) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)} = 1$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{\sin 2x} = \frac{1}{2}$ h) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\ln x}{x} = 0$ l) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x^2} = 4$ p) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^{-1}}{ctgx} = 1$

Sprawdź, czy: $(\infty - \infty)$

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = \frac{1}{2}$ c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)}\right) = -\frac{1}{2}$ e) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{\ln(x-1)}\right) = -\frac{1}{2}$ g) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = -\frac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = 0$ d) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x}\right) = -1$ f) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}\right) = -\frac{1}{2}$ h) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - ctg^2 x\right) = \frac{2}{3}$

Sprawdź, czy: $(0 \cdot \infty)$

a) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)tgx = -1$ c) $\lim\limits_{x\to \infty} x^2 e^{-x} = 0$ e) $\lim\limits_{x\to 0^+} x e^{1/x} = \infty$ g) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x^2 - 3\right)e^x = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln x = 0$ d) $\lim\limits_{x\to \infty} x\left(e^{1/x} - 1\right) = 1$ f) $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)\ln(1-x) = 0$ h) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{1}{x^3}\ln x = 0$

Zadanie 2. Zbadaj przebieg zmienności funkcji:

a) $f(x) = x - \frac{1}{x}$ c) $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ e) $f(x) = e^{-x^2}$ g) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 5$ d) $f(x) = \frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$ f) $f(x) = \sqrt{x}\ln x$ h) $f(x) = \sqrt{1-\cos x}$

Przebieg zmienności funkcji:

1	Dziedzina	6	Ekstremum
2	Punkty przecięcia z osiami układu współrzędnych	7	Przedziały monotoniczności
3	Parzystość $f(x) = f(-x)$, nieparzystość $f(x) = -f(-x)$, okresowość	8	Punkt przegięcia $f''(x) = 0$
4	Granice na krańcach dziedziny	9	Wypukłość $f''(x) > 0$ i wklęsłość $f''(x) < 0$
5	Asymptoty: Pionowa: $x = c$ gdy $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \pm\infty$	10	Tabela
		11	Wykres

<u>ĆWICZENIA 7, 8</u> – ZADANIA **(**Pochodna i jej zastosowania)

Pozioma: $y = a$ gdy $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = a$

Ukośna: $y = mx + n$ gdzie $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \neq \begin{cases} \pm\infty \\ 0 \end{cases}$, $n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx]$