ĆWICZENIA 1 – TEORIA (Ciągi liczbowe, granica)

Przykład :
Ciągi możemy określać na różne sposoby, na przykład:

wzorem: $a_n = 2^n$, $c_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$, $d_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$

rekurencyjnie: $a_1 = 7,\ a_{n+1} = a_n + 3,$

opisowo: b_n - n - ta liczba pierwsza.

Przy czym pamiętamy, że n jest liczbą naturalną, czyli przyjmuje wartości 1,2,3,…..

UWAGA

Wyniki niektórych granic są oczywiste, jeżeli podstawi się kolejne liczby naturalne. Warto jednak zapamiętać pewne podstawowe wzory:

$\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$	podobnie dla ciągów typu $3n^2$;$6n^3$; n^7 …. granica też jest równa ∞
$\lim\limits_{n\to\infty} -n = -\infty$	dla ciągów typu $-3n^2$;$-6n^3$; $-n^7$ …. granica też jest równa $-\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ dla $a>0$	
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$	
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$	dla ciągów typu $\frac{-2}{n};\frac{3}{n^2};\frac{7}{n};\frac{-9}{n^3}$ …. granica też jest równa 0
jeżeli **$a>1$** to $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$	dla ciągów typu $8^n;2^n;\left(1\frac{5}{7}\right)^n;\left(\frac{5}{4}\right)^{3n}$ …. granica też jest równa ∞
jeżeli **$\lvert a\rvert<1$** to $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$	dla $(0{,}3)^n;\left(-\frac{3}{5}\right)^n;\left(\frac{2}{3}\right)^n;\left(\frac{1}{4}\right)^{3n};\frac{4}{7^n}$ …. granica też jest równa 0

Obliczając granice ciągów korzystamy również z następujących własności:

Twierdzenie 1 (o arytmetyce granic ciągów) Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, to:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$

   np. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n} + \frac{2n}{3n}\right) = 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$,

2. $\lim\limits_{n\to\infty} cb_n = cb$ dla dowolnej stałej $c \in R$,

   np. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n} = 2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 2\cdot 0 = 0$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$,

   np. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}\cdot\frac{2n}{3n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{3n} = 0\cdot\frac{2}{3} = 0$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, jeśli $b \neq 0$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$, jeśli $k \in N \setminus \{1\}$

8. Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ to, dla dowolnej stałej *c*, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c}{a_n} = \pm\infty$.

9. Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c}{a_n} = 0$.

Przykład :

Oblicz granicę ciągu $\frac{2n^2 - 2n + 1}{3n^2 - 2n + 5}$.

Najlepszym sposobem na obliczenie tego typu granicy jest podzielenie licznika i mianownika przez liczbę *n* podniesioną do potęgi największej jaka jest w liczniku. W liczniku największe jest n^2 dlatego dzielimy przez nią każde wyrażenie.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 2n + 1}{3n^2 - 2n + 5} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(2n^2 - 2n + 1\right)\frac{1}{n^2}}{\left(3n^2 - 2n + 5\right)\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^2}{n^2} - \frac{2n}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{\frac{3n^2}{n^2} - \frac{2n}{n^2} + \frac{5}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{3 - \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}} = \frac{2-0+0}{3-0+0} = \frac{2}{3}$$

Otrzymujemy granice z liczb, czyli odpowiednio 2 w liczniku i 3 w mianowniku. Wyrażenia które w mianowniku zawierają *n* (lub *n* do potęgi) dążą do 0. W ten sposób otrzymaliśmy wynik.

Przykład :

Oblicz granicę ciągu $\sqrt{n^3 - 5} - \sqrt{n^3 - n + 5}$.

Tego typu granice obliczamy wykorzystując wzory skróconego mnożenia. W tym wypadku ze wzoru $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. Na początek zapisujemy wyrażenie w postaci ułamka o mianowniku równym 1. Dalej mnożymy licznik i mianownik przez wyrażenie $\sqrt{n^3 - 5} + \sqrt{n^3 - n + 5}$ (zmieniamy znak z – na +) i upraszczamy wyrażenie:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^3 - 5} - \sqrt{n^3 - n + 5} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3 - 5} - \sqrt{n^3 - n + 5}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^3 - 5} - \sqrt{n^3 - n + 5}\right)}{1} \frac{\left(\sqrt{n^3 - 5} + \sqrt{n^3 - n + 5}\right)}{\left(\sqrt{n^3 - 5} + \sqrt{n^3 - n + 5}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^3 - 5}\right)^2 - \left(\sqrt{n^3 - n + 5}\right)^2}{\left(\sqrt{n^3 - 5} + \sqrt{n^3 - n + 5}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - 5 - \left(n^3 - n + 5\right)}{\left(\sqrt{n^3 - 5} + \sqrt{n^3 - n + 5}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n - 10}{\left(\sqrt{n^3 - 5} + \sqrt{n^3 - n + 5}\right)}$$

Dalej postępujemy analogicznie jak w poprzednim przykładzie, to znaczy dzielimy licznik i mianownik przez liczbę *n* podniesioną do potęgi największej jaka jest w liczniku:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n - 10}{\left(\sqrt{n^3 - 5} + \sqrt{n^3 - n + 5}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n - 10)}{\left(\sqrt{n^3 - 5} + \sqrt{n^3 - n + 5}\right)} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n} - \frac{10}{n}}{\frac{\sqrt{n^3 - 5}}{n} + \frac{\sqrt{n^3 - n + 5}}{n}} =$$

W kolejnym kroku przekształcamy mianownik:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{10}{n}}{\sqrt{\frac{n^3 - 5}{n^2}} + \sqrt{\frac{n^3 - n + 5}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{10}{n}}{\sqrt{\frac{n^3}{n^2} - \frac{5}{n^2}} + \sqrt{\frac{n^3}{n^2} - \frac{n}{n^2} + \frac{5}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{10}{n}}{\sqrt{n - \frac{5}{n^2}} + \sqrt{n - \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}}} =$$

$$= \frac{1 - 0}{\sqrt{\infty - 0} + \sqrt{\infty - 0 + 0}} = \frac{1}{\sqrt{\infty} + \sqrt{\infty}} = \frac{1}{\infty + \infty} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

ĆWICZENIA 1 – TEORIA (Ciągi liczbowe, granica)

Przykład :

Oblicz granicę ciągu $\dfrac{6\left(3^{3n}\right)-4}{27^{n-1}+5}$.

W pierwszej kolejności staramy się doprowadzić do tego, żeby wyrażenia 3^{3n} i 27^{n-1} miały takie same podstawy. Widzimy, że liczbę 27 możemy zapisać jako 3^3, stąd korzystając ze wzoru $\left(a^p\right)^q = a^{p\cdot q}$ mamy, że $27^{n-1}=(3^3)^{n-1} = 3^{3\,(n-1)} = 3^{3n-3}$. Stąd:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6\left(3^{3n}\right)-4}{27^{n-1}+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{6\left(3^{3n}\right)-4}{3^{3n-3}+5}=$$

Dalej licznik i mianownik dzielimy przez 3^{3n}. Korzystając ze wzorów $\dfrac{a^p}{a^q}=a^{p-q}$ oraz $a^{-p}=\dfrac{1}{a^p}$ upraszczamy tak otrzymane wyrażenie:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(6\left(3^{3n}\right)-4\right)\left(\frac{1}{3^{3n}}\right)}{\left(3^{3n-3}+5\right)\left(\frac{1}{3^{3n}}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{6\left(3^{3n}\right)}{3^{3n}}-\frac{4}{3^{3n}}}{\frac{3^{3n-3}}{3^{3n}}+\frac{5}{3^{3n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{6-\frac{4}{3^{3n}}}{3^{-3}+\frac{5}{3^{3n}}}=\frac{6-0}{3^{-3}+0}=\frac{6}{\frac{1}{3^3}}=\frac{6}{\frac{1}{27}}=6\cdot 27=162.$$

Twierdzenie 2(określenie liczby *e*)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e$$

, przy czym $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ i $a_n \neq 0$. Liczba e jest podstawą logarytmu naturalnego, $e \approx 2{,}71828$.

Przykład :

Korzystając z definicji liczby e obliczyć podaną granicę $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n+3}\right)^{6n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^{6n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^{2n+3}\right]^3}{\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^9}=\frac{e^3}{(1+0)^9}=e^3$$

Przykład :

Korzystając z definicji liczby e obliczyć podaną granicę $\lim_{n\to\infty}(0{,}99...9)^{10n}$.

$$\lim_{n\to\infty}(0{,}99...9)^{10n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)^{10^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{(-10^n)}\right)^{10^n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{(-10^n)}\right)^{-10^n}\right]^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

ĆWICZENIA 1 – TEORIA (Ciągi liczbowe, granica)

Twierdzenie 2

Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem geometrycznym, tzn. ciągiem, którego wyrazy spełniają warunki: $a_1 \neq 0$ oraz $a_{n+1} = a_n q$, gdzie q jest stałą i $q \neq 0$.

Szereg geometryczny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny i jego sumą jest $S = \frac{a_1}{1-q}$, jeśli $|q| < 1$. Jeśli $|q| \geq 1$, szereg ten jest rozbieżny.

Przykład : Oblicz jaką wartość liczbową przedstawia ułamek okresowy 1,2(21).

Na początek przypomnijmy, że zapis 1,2(21) oznacza, że 1,2(21)= 1,2212121212121212121212121... .
Zauważmy, że ułamek możemy zapisać jako:

$$1{,}2(21) = 1{,}22121212121212121212121212121\ldots = 1{,}2 + 0{,}021 + 0{,}00021 + 0{,}0000021 + 0{,}000000021 + \ldots =$$

$$= 1{,}2 + \frac{21}{10^3} + \frac{21}{10^5} + \frac{21}{10^7} + \frac{21}{10^9} + \ldots = 1{,}2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{21}{10^{1+2n}}.$$

Stąd dla obliczenia wartości liczbowej ułamka okresowego należy obliczyć sumę $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{21}{10^{1+2n}}$. Aby ją wyliczyć potrzebne są dwie wartości: pierwszy wyraz ciągu (a_1), oraz iloraz ciągu (q):

$$a_1 = \frac{21}{10^3},$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{21}{10^5}}{\frac{21}{10^3}} = \frac{21}{10^5}\frac{10^3}{21} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}.$$

Czyli korzystając ze wzoru $S = \frac{a_1}{1-q}$ mamy, że $S = \frac{\frac{21}{10^3}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{21}{1000}}{\frac{99}{100}} = \frac{21}{1000}\frac{100}{99} = \frac{21}{990} = \frac{7}{330}$. A zatem ułamek:

$$1{,}2(21) = 1{,}2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{21}{10^{1+2n}} = 1{,}2 + \frac{7}{330} = \frac{12}{10} + \frac{7}{330} = \frac{12 \cdot 33}{10 \cdot 33} + \frac{7}{330} = \frac{403}{330}.$$