ĆWICZENIA 10 – TEORIA (Całka nieoznaczona, definicja, wzory)

I. FUNKCJA PIERWOTNA

Zasadniczym zagadnieniem rachunku różniczkowego było dotychczas zagadnienie obliczania pochodnej funkcji np.
dla funkcji $F(x)=x^2$ poszukiwaliśmy jej pochodnej i otrzymaliśmy wynik $F'(x)=f(x)=2x$
dla innej funkcji $F(x)=\sin x$, jej pochodna to $F'(x)=f(x)=\cos x$

- **Definicja (funkcja pierwotna)**:

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest określona i ciągłą w przedziale otwartym (a, b) to każdą funkcję $F(x)$ taką, że $F'(x)=f(x)$ dla $x \in (a, b)$ nazywamy funkcją pierwotną dla funkcji $f(x)$.

Funkcją pierwotną dla $f(x)=2x$ nazywamy funkcję $F(x)=x^2$
Funkcją pierwotną dla $f(x)= 3\sin^2 x \cos x$ nazywamy funkcję $F(x)=\sin^3 x$

- Funkcją pierwotną dla $f(x)=1$ nazywamy funkcję $F(x)= x$
- Funkcją pierwotną dla $f(x)= nx^{n-1}$ nazywamy funkcję $F(x)= x^n$
- Funkcją pierwotną dla $f(x)= -1/x^2$ nazywamy funkcję $F(x)= 1/x$
- Funkcją pierwotną dla $f(x)= 1/2\sqrt{x}$ nazywamy funkcję $F(x)= \sqrt{x}$
- Funkcją pierwotną dla $f(x)= e^x$ nazywamy funkcję $F(x)= e^x$
- Funkcją pierwotną dla $f(x)= a^x \ln a$ nazywamy funkcję $F(x)= a^x$
- Funkcją pierwotną dla $f(x)= 1/x$ nazywamy funkcję $F(x)= \ln |x|$
- Funkcją pierwotną dla $f(x)= 1/(x \ln a)$ nazywamy funkcję $F(x)= \log_a x$
- Funkcją pierwotną dla $f(x)= \cos x$ nazywamy funkcję $F(x)= \sin x$
- Funkcją pierwotną dla $f(x)= - \sin x$ nazywamy funkcję $F(x)= \cos x$
- Funkcją pierwotną dla $f(x)=1/\cos^2 x$ nazywamy funkcję $F(x)= \operatorname{tg} x$
- Funkcją pierwotną dla $f(x)= 1+\operatorname{tg}^2 x$ nazywamy funkcję $F(x)= \operatorname{tg} x$
- Funkcją pierwotną dla $f(x)= -1/\sin^2 x$ nazywamy funkcję $F(x)= \operatorname{ctg} x$
- Funkcją pierwotną dla $f(x)= -(1+\operatorname{ctg}^2 x)$ nazywamy funkcję $F(x)= \operatorname{ctg} x$
- Funkcją pierwotną dla $f(x)= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ nazywamy funkcję $F(x)= \arcsin x$
- Funkcją pierwotną dla $f(x)= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ nazywamy funkcję $F(x)= \arccos x$
- Funkcją pierwotną dla $f(x)= \frac{1}{1+x^2}$ nazywamy funkcję $F(x)= \operatorname{arctg} x$
- Funkcją pierwotną dla $f(x)= -\frac{1}{1+x^2}$ nazywamy funkcję $F(x)= \operatorname{arcctg} x$

- **Uwaga**:

Jeżeli funkcja $f(x)$ posiada funkcję pierwotną, to posiada ich nieskończenie wiele.

- **Przykład** :

ĆWICZENIA 10 – TEORIA (Całka nieoznaczona, definicja, wzory)

Funkcją pierwotną dla f(x)=2x jest funkcja F(x)= x^2 oraz F(x)= x^2+1 oraz F(x)= $x^2+10{,}2$ itd.
Zatem funkcją pierwotną dla f(x)=2x jest funkcja F(x)= x^2+c, gdzie c jest dowolną liczbą stałą.

- **Definicja (funkcja pierwotna danej funkcji):**

Jeżeli funkcje F(x) i G(x) są funkcjami pierwotnymi dla danej funkcji f(x) to istnieje taka stała c, że G(x)=F(x)+c

II. CAŁKA NIEOZNACZONA, DEFINICJA

- **Definicja (całka nieoznaczona):**

Zbiór wszystkich funkcji postaci F(x)+c , gdzie F(x) jest pewną funkcją pierwotną dla funkcji f(x) nazywamy całką nieoznaczoną funkcji f(x) i oznaczamy symbolem

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

- **Przykład :**

Funkcją pierwotną dla f(x)=2x jest funkcja F(x)= x^2+c, gdzie c jest dowolną liczbą stałą, co zapisujemy

$$\int f(x)dx = \int 2xdx = x^2 + c$$

- **Twierdzenie (o pochodnej całki)**

Pochodna całki nieoznaczonej jest równa funkcji podcałkowej, tzn.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

- **Przykład :**

Funkcją pierwotną dla f(x)=2x jest funkcja F(x)= x^2+c,
Ponieważ pochodna funkcji F(x)= x^2+c jest funkcją f(x)=2x, co zapisujemy

$$\int f(x)dx = \int 2xdx = x^2 + c$$

$$\left(x^2 + c\right)' = 2x + 0 = 2x$$

III. ARYTMETYKA RACHUNKU CAŁKOWEGO I WZORY

Arytmetyka rachunku całkowego :

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$$

- **Przykład :**

$$\int f(x)dx = \int 2xdx = 2\int xdx = x^2 + c$$

ĆWICZENIA 10 – TEORIA (Całka nieoznaczona, definicja, wzory)

- **Całki podstawowe - wzory:**

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1$$

$$\int dx = x + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctg\, x + c$$

- **Przykłady :**

$$\int (5x^2 - 6x + 3 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2})dx = 5\int x^2 dx - 6\int xdx + 3\int dx - \int \frac{2}{x}dx + \int \frac{5}{x^2}dx =$$

$$= 5\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 3x - 2\ln x - 5\frac{1}{x} + c$$

ĆWICZENIA 10 – TEORIA (Całka nieoznaczona, definicja, wzory)

Zasygnalizowanie interpretacji geometrycznej

- Już Archimedes wiedział, że pole obszaru ograniczonego przez parabolę $y=x^2$ dla $x\in<0;1>$ i oś O_x jest równe 1/3.
- Obliczył to pole przybliżając je polami prostokątów o podstawie 1/n i wysokości $(k/n)^2$, gdzie k= 1, 2, 3, ...,n (na rys. n=10).
- Pole pojedynczego prostokąta wynosi: k^2/n^3, suma pól wszystkich takich prostokątów, dla k = 1,2,3,...,n jest równa dla n=10

$$\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{10^3}(1+4+...+100)=0,385$$