ĆWICZENIA 11 – TEORIA (Metody całkowania: przez podstawienie, przez części.)

I. CAŁKOWANIE PRZEZ PODSTAWIENIE

Wiemy, że dla funkcji f(x)=2x funkcją pierwotną jest F(x)=x^2 ponieważ F'(x)=f(x)=2x.
Dla innej funkcji f(x)=6(3x+2) funkcją pierwotną jest F(x)=$(3x+2)^2$, ponieważ F'(x)=f(x)=$[(3x+2)^2]'$= 6(3x+2) lub inaczej obliczając całkę potwierdzamy ten wynik :

$$F(x)=\int 6(3x+2)dx=6[\int 3xdx+\int 2dx]=18\int xdx+12\int dx=9x^2+12x+c=$$

$$=9x^2+12x+4-4+c=(3x+2)^2-4+c=(3x+2)^2+C$$

- W wielu przypadkach wyznaczenie funkcji pierwotnej sprowadza się do całek elementarnych przez wprowadzenie nowej zmiennej.

- Aby obliczyć np. następującą całkę : $F(x)=\int(2x+1)^5dx$
  Trzeba wprowadzić nową zmienną t = 2x + 1

- Weźmy F(x) będącą funkcją pierwotną funkcji f(x), czyli :

$$F(x)=\int f(x)dx$$

  a więc F'(x) = f(x).

- Jeżeli wprowadzimy nową zmienną t przez podstawienie $x=\varphi(t)$, to funkcja F(x)=F(φ(t)) jest funkcją zmiennej t, pochodna tej funkcji :

$$\frac{dF}{dt}=\frac{dF}{dx}\frac{dx}{dt}=f(x)\frac{dx}{dt}=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$$

  A stąd :

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$$

- **Twierdzenie (całkowanie przez podstawienie) :**

Jeżeli funkcja f(x) jest określona i ciągłą w przedziale otwartym (a, b) to wprowadzenie nowej zmiennej niezależnej t pod znak całki zamiast x poprzez odpowiednią funkcję x=φ(t) i zamiast dx poprzez odpowiednią różniczkę dx= φ'(t)dt umożliwi wyliczenie całki.

$$\boxed{\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt}$$

- **Przykład (przez podstawienie) :**

$$\int(3x-2)^4dx=\left\|\begin{matrix}3x-2=t,\ x=\frac{1}{3}(t+2)\\ dx=\frac{1}{3}dt\end{matrix}\right\|=\int t^4\cdot\frac{1}{3}dt=\frac{1}{3}\frac{t^5}{5}+C=\frac{1}{15}(3x-2)^5+C$$

- **Przykład (przez podstawienie)** :

$$\int\sqrt{2x+7}dx=\left\|\begin{matrix}2x+7=t^2,\ x=\frac{1}{2}(t^2-7)\\ dx=tdt\end{matrix}\right\|=\int\sqrt{t^2}tdt=\int t^2dt+C=\frac{t^3}{3}+C=\frac{(2x+7)^{\frac{3}{2}}}{3}+C$$

- **Uwaga (całkowanie przez podstawienie) :**

ĆWICZENIA 11 – TEORIA (Metody całkowania: przez podstawienie, przez części.)

Często wygodnie jest stosować wzór :

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c}$$

- **Przykład (całkowanie przez podstawienie) :**

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x-123}dx = \ln|x^2+2x-123| + c$$

- **Uwaga (całkowanie przez podstawienie) :**

Często wygodnie jest stosować wzór :

$$\boxed{\int f^a(x)f'(x)dx = \frac{f^{a+1}(x)}{a+1} + c}$$

- **Przykład (całkowanie przez podstawienie) :**

$$\int (x+71)^5 dx = \frac{(x+71)^5}{6} + c$$

II. CAŁKOWANIE PRZEZ CZĘŚCI

- **Twierdzenie (całkowanie przez części):**

Jeżeli

$$u = u(x),\ v = v(x)$$

to

$$\boxed{\int uv'dx = uv - \int u'vdx}$$

- **Sprawdźmy**, że : $\int uv'dx + \int u'vdx = uv$

Obliczmy pochodną :

$$(\int uv'dx + \int u'vdx)' = uv' + u'v = (uv)'$$

- **Przykład (całkowanie przez części):**

$$I = \int \ln^2 xdx = \left\| \begin{matrix} u = \ln^2 x & u' = 2\ln x\frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{matrix} \right\| = x\ln^2 x - 2\int \ln xdx = x\ln^2 x - 2\left\| \begin{matrix} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{matrix} \right\| =$$

$$= x\ln^2 x - 2(x\ln x - \int dx) = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + c$$