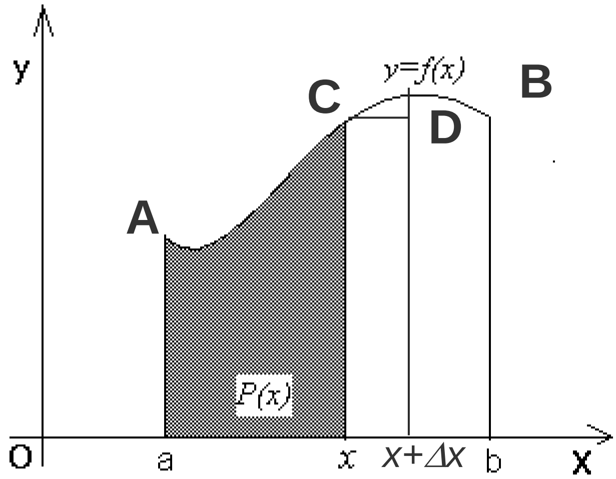
ĆWICZENIA 11 – TEORIA (Całka oznaczona: definicja. Całka niewłaściwa)

I. CAŁKA OZNACZONA

Obliczmy pole figury AabB zamkniętej łukiem AB krzywej o równaniu $y=f(x)$ dla $x\in\langle a;b\rangle$, prostymi $x=a$, $x=b$ i osią Ox.



Niech f(x) będzie funkcją ciągłą i dodatnią w przedziale $\langle a;b\rangle$. Obierzmy w tym przedziale dowolny punkt x i oznaczmy przez P(x) pole zaznaczonego obszaru AaxC.
Jeżeli przesuniemy rzędną C o odciętej x do rzędnej D o odciętej $x+\Delta x$, to wielkość pola P(x) się zmieni na $P(x+\Delta x)$. Zatem $P(x+\Delta x) - P(x) = \Delta P$
Jest to pole równe w przybliżeniu polu prostokąta $Cx(x+\Delta x)D$. Pole to jest równe $f(x)\Delta x$.
Spełniona jest nierówność

$$f(x_1)\Delta x \le \Delta P \le f(x_2)\Delta x,$$

gdzie $f(x_1)$ jest wartością najmniejszą, a $f(x_2)$ wartością największą funkcji f(x) w przedziale $\langle x; x+\Delta x\rangle$.

Z nierówności $f(x_1)\Delta x \le \Delta P \le f(x_2)\Delta x$, wynika

$$f(x_1) \le \frac{\Delta P}{\Delta x} \le f(x_2)$$

$$f(x_1) \le \frac{P(x+\Delta x) - P(x)}{\Delta x} \le f(x_2)$$

Gdy $\Delta x \to 0$, wówczas $x_1 \to x$ oraz $x_2 \to x$, więc iloraz różnicowy

$$\frac{\Delta P}{\Delta x} \to f(x)$$

Z definicji pochodnej mamy $$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = P'(x)$$

stąd

$$P'(x) = f(x)$$

To funkcja P(x) jest funkcją pierwotną (całką nieoznaczoną) funkcji f(x). Jeżeli przez F(x) oznaczymy dowolną funkcję pierwotną funkcji f(x), wówczas

$$P(x) = F(x) + c$$

ĆWICZENIA 11 – TEORIA (Całka oznaczona: definicja. Całka niewłaściwa)

Dla x=a mamy pole P(a)=0, a stąd

$$0 = P(a) = F(a) + c \Rightarrow c = -F(a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(x) = F(x) + c = F(x) - F(a)$$

Jest to pole obszaru AaxC.

- **Definicja (całka oznaczona):**

Różnicę między wartością funkcji pierwotnej w punkcie x=b a wartością jej w punkcie x=a nazywamy całką oznaczoną funkcji f(x) od a do b i zapisujemy

$$P = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

a oznacza granicę dolną całkowania, b oznacza granicę górną.

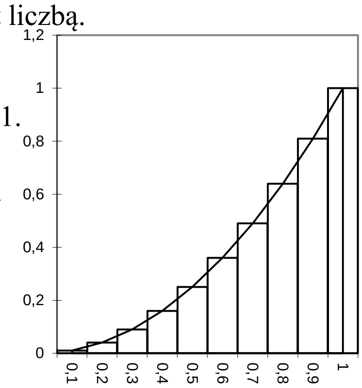
- **Uwaga :**

Całka nieoznaczona jest zbiorem funkcji, a całka oznaczona jest liczbą.

- **Przykład 1 :**

Obliczmy pole powierzchni pod parabolą x^2 pomiędzy x=0 a x=1.

$$P = \int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = F(1) - F(0) = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$



Korzystają ze związku pomiędzy całką oznaczoną a polem, możemy utworzyć nową definicję całki oznaczonej umożliwiającą rozmaite wielkości fizyczne, czy geometryczne lub inne przedstawić za pomocą całki oznaczonej.

- **Przykład 2 :** Oblicz całkę oznaczoną

$$\int_{-1}^{1}\left(x^3 - x + 1\right)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1\right) = 2$$

- **Definicja (całka oznaczona) :**

Całka oznaczona funkcji ciągłej w danym przedziale jest to granica, do której dąży suma iloczynów części przedziału Δx_i przez dowolne wartości funkcji $f(x_i)$ w tych częściach, gdy te części dążą do zera, to znaczy :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$