ĆWICZENIA 4 – TEORIA (Granica i ciągłość funkcji, asymptoty)

GRANICA FUNKCJI

Przykład :

Wartości funkcji $y = 2x - 1$ zbliżają się dowolnie do liczby 5, gdy za zmienną niezależną x podstawiamy liczby bliskie 3. Taką liczbę 5 nazwiemy granicą funkcji $y = 2x - 1$, gdy x dąży do 3 (z lewej lub prawej strony). Można zapisać to symbolicznie :

$$\lim_{x\to 3}(2x-1) = 5$$

Zauważmy, że w tym przypadku granica funkcji f(x)=2x-1 przy x→3, jest równocześnie wartością tej funkcji w punkcie x=3. Tak zawsze nie jest.

Przykład : Oblicz granicę funkcji $g(x) = \frac{(4x-12)}{x-3}$ w punkcie x = 3.

Zauważmy, że $g(x) = \frac{(4x-12)}{x-3} = \frac{4(x-3)}{x-3} = 4$ dla $x \neq 3$, a dla $x = 3$, $g(x)$ nie jest zdefiniowane. Natomiast $\lim_{x\to 3}\frac{4(x-3)}{x-3} = 4$.

Arytmetyka granic funkcji

$$\lim_{x\to a} c = c$$

$$\lim_{x\to a} c\cdot f(x) = c\cdot \lim_{x\to a} f(x)$$

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}, \text{ gdy } g(x) \neq 0 \text{ i } \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

Przykład : Wyznacz granicę funkcji $f(x) = \frac{3x^2-5x-2}{5x^2-20}$ przy $x \to 2$.

Łatwo zauważyć, że w punkcie x = 2 funkcja nie jest określona (licznik i mianownik są zerami). Ale należy zauważyć: $3x^2 - 5x - 2 = 3(x-2)(x+\frac{1}{3})$ oraz $5x^2 - 20 = 5(x^2-4) = 5(x-2)(x+2)$. Zatem

$$f(x) = \frac{3x^2-5x-2}{5x^2-20} = \frac{3(x-2)(x+\frac{1}{3})}{5(x-2)(x+2)} = \frac{3(x+\frac{1}{3})}{5(x+2)}.$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{3x^2-5x-2}{5x^2-20} = \lim_{x\to 2}\frac{3(x+\frac{1}{3})}{5(x+2)}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)}{(x-2)} = \frac{7}{20}\cdot 1 = \frac{7}{20}$$

Przykład : Obliczyć granicę:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^5-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x-1)}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x+1)}{(x^4+x^3+x^2+x+1)} = 1\cdot\frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

Przykład : Wyznacz granicę lewo- i prawostronną funkcji $f(x) = \frac{x^3-1}{|x-1|}$ w punkcie $x = 1$.

ĆWICZENIA 4 – TEORIA (Granica i ciągłość funkcji, asymptoty)

$D_f = \{x;\ x \in (-\infty,1) \cup (1,\infty)\}$.

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{x^3-1}{|x-1|} = -\lim_{x\to1^-} \frac{x^3-1}{x-1} = -\lim_{x\to1^-} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)} = -\lim_{x\to1^-}(x^2+x+1) = -3$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{x^3-1}{|x-1|} = \lim_{x\to1^+} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)} = \lim_{x\to1^+}(x^2+x+1) = 3$$

Przykład : Wyznacz granicę $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ w punkcie $x = 1$.

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{1}{1-x^2} = \lim_{x\to1}\left[\frac{1}{1-x}\,\frac{1}{1+x}\right] = \lim_{x\to1} \frac{1}{1-x} \cdot \lim_{x\to1} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to1} \frac{1}{1-x}.$$

$$\lim_{x\to1^-} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Przykład : Wyznacz granicę wielomianu $w(x) = 2x^3 - 10x^2 + 15x - 18$ gdy $x\to+\infty$ lub $x\to-\infty$.

Zauważmy, że $w(x) = 2x^3\left(1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{15}{2x^2} - \dfrac{9}{x^3}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{15}{2x^2} - \dfrac{9}{x^3}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5}{x} + \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{15}{2x^2} - \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{9}{x^3} = 1$, natomiast $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$, a $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$. Zatem ostatecznie: $\lim\limits_{x\to+\infty} w(x) = +\infty$, a $\lim\limits_{x\to-\infty} w(x) = -\infty$.

GRANICE PODSTAWOWYCH WYRAŻEŃ NIEOZNACZONYCH

$$\infty - \infty,\ 0 \cdot \infty,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 1^\infty,\ \infty^0,\ 0^0$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to0} \frac{tgx}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a, \quad a > 0$$

$$\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a \mathrm{e}, \quad 0 < \mathrm{a} \neq 1$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a, \quad \mathrm{a} \in \mathbf{R}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{1/x} = e$$

$$\lim_{x\to0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a, \quad \mathrm{a} \in \mathbf{R}$$

ĆWICZENIA 4 – TEORIA (Granica i ciągłość funkcji, asymptoty)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1 \qquad\qquad \lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1$$

TWIERDZENIA O GRANICACH NIEWŁAŚCIWYCH

$p+\infty=\infty$	$-\infty<p\le\infty$	$p\cdot\infty=\infty$	$0<p\le\infty$
$\frac{p}{\infty}=0$	$-\infty<p<\infty$	$\frac{p}{0^+}=\infty$	$0<p\le\infty$
$p^{\infty}=0$	$0^+\le p<1$	$p^{\infty}=\infty$	$1<p\le\infty$
$\infty^{q}=0$	$-\infty\le q<0$	$\infty^{q}=\infty$	$0<q\le\infty$

CIĄGŁOŚĆ FUNKCJI

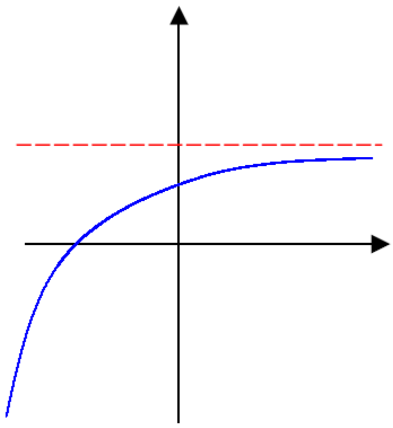
<u>Przykład .</u> Korzystając z definicji, uzasadnić ciągłość funkcji $f(x)=2x^3-3x+5$.
Mamy pokazać, że

$$\underset{x_0\in R}{\forall}\ \underset{(x_n)}{\forall}\left[\left(\lim_{n\to\infty}x_n=x_0\right)\Rightarrow\left(\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)\right)\right]$$

Niech x_0 będzie dowolną liczbą rzeczywistą i niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem zbieżnym do x_0, wtedy $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2x_n^3-3x_n+5\right)=2\left(\lim\limits_{n\to\infty}x_n\right)^3-3\left(\lim\limits_{n\to\infty}x_n\right)+\lim\limits_{n\to\infty}5=2x_0^3-3x_0+5$.

ASYMPTOTY FUNKCJI

<u>Przykład .</u> Znaleźć asymptoty pionowe i asymptotę poziomą funkcji $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$.



$D_f=\{x;\ x\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)\}$

Ponieważ *f* jest parzysta, wystarczy obliczyć granice

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{1-x^2}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{1-x^2}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$ oraz

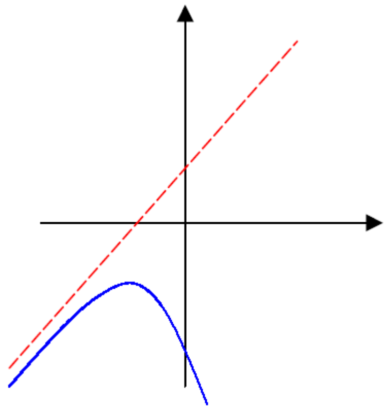
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1-x^2}=\dfrac{1}{-\infty}=0$

Z powyższego i z parzystości funkcji *f* wynika, że proste $x=1$ oraz $x=-1$ są asymptotami pionowymi obustronnymi, a prosta $y=0$ asymptotą poziomą w obu nieskończonościach.

ĆWICZENIA 4 – TEORIA (Granica i ciągłość funkcji, asymptoty)

Uwaga :
Asymptoty ukośne istnieją, jeżeli x dąży do nieskończoności i wykres funkcji f(x) dąży do pewnej prostej y=ax+b (a≠0, a ≠ ∞, b ≠ ∞), gdzie

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{i} \quad b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - ax]$$



Prosta y=ax+b jest asymptotą ukośną funkcji f(x).

<u>**Przykład .**</u> Znaleźć wszystkie możliwe asymptoty funkcji

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x} - 2}.$$

Ponieważ $D_f = \{x;\ x \in [0,4) \cup (4,\infty]\}$ zatem $x = 0$ należy do dziedziny i asymptotą pionową może być tylko $x = 4$.
Obliczamy granice:

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{x}{\sqrt{x}-2} = \frac{4}{0^-} = -\infty, \text{ oraz } \lim_{x\to 4^+} \frac{x}{\sqrt{x}-2} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

Asymptotą pionową obustronną jest $x = 4$.
Szukamy asymptoty ukośnej.
Ponieważ dziedzina funkcji jest nieograniczona tylko z góry, więc ewentualna asymptota ukośna y = $ax + b$ (a≠0, $a \neq \infty$, $b \neq \infty$) może istnieć tylko w $+\infty$.

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}-2} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x}{\sqrt{x}-2} - 0 \cdot x \right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{1 - \frac{2}{\sqrt{x}}} = \infty$$

Badana funkcja nie posiada asymptoty ukośnej.