ĆWICZENIA 5 – TEORIA (Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej)

POCHODNA FUNKCJI JEDNEJ ZMIENNEJ

Przykład Obliczyć iloraz różnicowy funkcji $f(x)=x^2$ w punkcie $x_0=-1$
Odpowiadający przyrostowi $\Delta x=0{,}01$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0}{\Delta x}=\frac{x_0^2+2x_0\Delta x+\Delta x^2-x_0^2}{\Delta x}=\frac{2x_0\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\cdot(-1)\cdot 0{,}1+0{,}1^2}{0{,}1}=-1{,}9$$

Przykład Obliczyć z definicji pochodną funkcji y = 2x+4 w punkcie x.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{(2x+2\Delta x+4)-(2x+4)}{\Delta x}=$$

$$=\frac{2x+2\Delta x+4-2x-4}{\Delta x}=2$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}2=2$$

Funkcja y = 2x+4 posiada w każdym punkcie x pochodną y' równą 2.

Przykład : Obliczyć z definicji pochodną funkcji $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ w punkcie x, gdzie $x\neq 0$

Ponieważ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{(x+\Delta x)^2}-\frac{1}{x^2}}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{x^2+2x\Delta x+\Delta x^2}-\frac{1}{x^2}}{\Delta x}=$$

$$=\frac{\frac{x^2-\left(x^2+2x\Delta x+\Delta x^2\right)}{\left(x^2+2x\Delta x+\Delta x^2\right)x^2}}{\Delta x}=\frac{-2x\Delta x-\Delta x^2}{\Delta x\left(x^2+2x\Delta x+\Delta x^2\right)x^2}=\frac{\Delta x(-2x-\Delta x)}{\Delta x\left(x^2+2x\Delta x+\Delta x^2\right)x^2}=$$

$$=\frac{-2x-\Delta x}{\left(x^2+2x\Delta x+\Delta x^2\right)x^2}$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2x-\Delta x}{\left(x^2+2x\Delta x+\Delta x^2\right)x^2}=\frac{-2x}{x^4}=-\frac{2}{x^3}$$

Przykład Korzystając z różniczki funkcji, obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia $\sqrt[3]{63}$.

Przyjmujemy $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x_0=64$, $\Delta x=-1$

$$\sqrt[3]{63}\approx\sqrt[3]{64}+\left(\sqrt[3]{x}\right)'|_{x=64}(-1)=4-\frac{1}{3\cdot 16}=3{,}9792\ldots$$

ĆWICZENIA 5 – TEORIA (Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej)

REGUŁY OBLICZANIA POCHODNYCH

	Funkcja	**Pochodna**	**Uwagi**
1	$y = c$	$y' = 0$	$c \in R$
2	$y = x$	$y' = 1$	
3	$y = \sin x$	$y' = \cos x$	
4	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	
5	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	
6	$y = e^x$	$y' = e^x$	
7	$y = x^k$	$y' = kx^{k-1}$	$k \neq 0$
8	$y = tgx$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
9	$y = ctgx$	$y' = \frac{-1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi$
10	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, a \neq 1$ $0 < x < +\infty$
11	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$x > 0$
12	$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1 < x < +1$ $-\frac{\pi}{2} < y < +\frac{\pi}{2}$
13	$y = \arccos x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1 < x < +1$ $0 < y < \pi$
14	$y = arc\,tgx$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$-\frac{\pi}{2} < y < +\frac{}{2}$
15	$y = arcctgx$	$y' = \frac{-1}{1+x^2}$	$0 < y < \pi$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ĆWICZENIA 5 – TEORIA (Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej)

Przykład
Oblicz pochodną funkcji: $y = 5$

$y' = (5)' = 0$

Przykład
Oblicz pochodną funkcji: $y = 3x$

$y' = (3x)' = 3(x)' = 3$

Przykład
Oblicz pochodną funkcji: $y = (3-x)/(x-2)$

$$y' = \frac{-(x-2)-(3-x)}{(x-2)^2}$$

Przykład
Oblicz pochodną funkcji: $y = x^{12}$

$y' = 12x^{12-1} = 12x^{11}$

Przykład
Wykorzystując reguły obliczania pochodnych funkcji wyznacz pochodną funkcji

$y = (4x^2 - 4x)/\sqrt{x}$

$$y' = \frac{(8x-4)\sqrt{x} - (4x^2-4x)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{(8x-4)\sqrt{x}\,2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} - \frac{(4x^2-4x)}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2x(8x-4)-(4x^2-4x)}{2x\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{16x^2 - 8x - 4x^2 + 4x}{2x\sqrt{x}} = \frac{12x^2 - 4x}{2x\sqrt{x}} = \frac{6x^2 - 2x}{x\sqrt{x}}$$