ĆWICZENIA 6 – TEORIA (Pochodna, interpretacja geometryczna i fizyczna, wzory)

POCHODNA - INTERPRETACJA FIZYCZNA

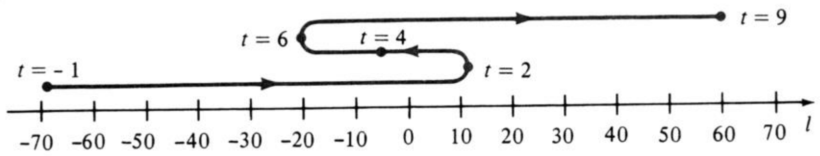
Przykład Funkcja położenia punktu ***P*** na osi liczbowej dana jest wzorem:
$s(t) = t^3 - 12t^2 + 36t - 20$, gdzie t mierzone jest w sekundach a $s(t)$ w centymetrach.
Opisać ruch punktu ***P*** w przedziale czasu <-1, 9>.

Rozwiązanie.

Różniczkując otrzymujemy
$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 24t + 36 = 3(t-2)(t-6)$,
$a(t) = v'(t) = 6t - 24 = 6(t-4)$.
W konsekwencji zerowa prędkość osiągana jest dla $t = 2$ i $t = 6$. Musimy więc sprawdzić zachowanie s w przedziałach (-1, 2), (2, 6) i (6, 9).
Tablica zawiera wartości położenia, prędkości i przyspieszenia w ważnych punktach czasowych, mianowicie na końcach rozważanego przedziału czasu i w punktach, w których prędkość lub przyspieszenie są równe zeru.

t	-1	2	4	6	9
$s(t)$	-69	12	-4	-20	61
$v(t)$	63	0	-12	0	63
$a(t)$	-30	-12	0	12	30

Schematycznie można ruch punktu ***P*** przedstawić jak na rysunku. Krzywa pokazana nad osią liczbową nie jest torem punktu, pokazuje tylko sposób jego poruszania się. Dla $t = -1$ punkt



znajduje się 69 cm na lewo od początku osi i porusza się w prawo z prędkością 63 cm/sek. Ujemne przyspieszenie -30 cm/sek^2 wskazuje, że prędkość zmniejsza się w każdej sekundzie o 30 cm/sek. Punkt porusza się w prawo coraz wolniej, aż dla $t = 2$ osiąga zerową prędkość, 12 cm na prawo od początku osi. Przyspieszenie, w tym momencie ciągle ujemne, $a(2) = -12$, powoduje zmianę kierunku ruchu punktu ***P*** i wzrost jego szybkości do 12 cm/sek. dla $t = 4$ (prędkość punktu w tym momencie wynosi -12cm/sek.). Dla $t = 4$ przyspieszenie równe jest zeru a następnie przyjmuje wartości dodatnie, powodując zwiększenie prędkości. Dla $t = 6$, w położeniu $s(6) = -20$, prędkość przyjmuje wartość $v(6) = 0$. Wówczas punkt ***P*** po raz drugi zmienia kierunek ruchu, osiągając dla $t = 9$ położenie $s(9) = 70$ i prędkość $v(9) = 63$.

ĆWICZENIA 6 – TEORIA (Pochodna, interpretacja geometryczna i fizyczna, wzory)

POCHODNA FUNKCJI ZŁOŻONEJ

Przykłady

a) $y = (7x+11)^{31}$; $y = u^{31}$, $u = 7x+11$,

$y' = 31 \cdot u^{30} \cdot 7 = 217(7x+11)^{30}$,

b) $y = \sin 10x$; $y = \sin u$, $u = 10x$,

$y' = \cos u \cdot 10 = 10\cos 10x$,

c) $y = \arcsin(2x-1)$; $y = \arcsin u$, $u = 2x-1$,

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}},$$

d) $y = e^{\sin x}$; $y = e^u$, $u = \sin x$,

$$y' = e^u \cdot \cos x = e^{\sin x} \cos x$$

e) $y = \arccos\sqrt{x}$; $y = \arccos u$, $u = \sqrt{x}$,

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-1}{2\sqrt{x-x^2}},$$

f) $y = e^x \cdot \cos x$;

$$y' = e^x \cdot \cos x - e^x \sin x,$$

g) $y = e^{\cos x}$;

$$y' = e^{\cos x}(-\sin x),$$

h) $y = e^u$; $u(x) = \cos x$,

$$y' = (e^u)' \cdot u' = e^u(-\sin x) = e^{\cos x}(-\sin x),$$

i) $y = \ln\frac{1}{1+x^2}$;

$$y' = (1+x^2) \cdot \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = (1+x^2) \cdot \frac{(-2x)}{(1+x^2)^2}$$