ĆWICZENIA 7 – TEORIA (Reguła de l'Hospitala)

Twierdzenie. Reguła de l'Hospitala:

Jeśli funkcje f i g sa różniczkowalne w pewnym otwartym przedziale (a, b) zawierającym c, jeśli $g'(x) \neq 0$ dla $x \in$ (a, b) i $x \neq$ c oraz jeśli:

$\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$ i $\lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$,

lub

$\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$ i $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \infty$,

to

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Wyrażenie typu $\frac{\infty}{\infty}$ i $\frac{0}{0}$

<u>Przykład</u>

Obliczyć $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{ctgx}$

Rozwiązanie

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{ctgx} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to 0}\sin x \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 0\cdot 1 = 0$$

Czasem regułę tę trzeba stosować kilkakrotnie:

<u>Przykład</u>

Obliczyć $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}$.

Rozwiązanie.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{3e^{3x}-3}{10\sin 5x\cos 5x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{3e^{3x}-3}{5\sin 10x} = \frac{0}{0}$, zatem trzeba zastosować regułę de l'Hospitala powtórnie

$$\lim_{x\to 0}\frac{3e^{3x}-3}{5\sin 10x} = \lim_{x\to 0}\frac{9e^{3x}}{50\cos 10x} = \frac{9}{50}$$

ĆWICZENIA 7 – TEORIA (Reguła de l'Hospitala)

Wyrażenie typu ∞ - ∞

Rozpatrzmy wyrażenie $f(x) - g(x)$ takie, że przy $x \to c$ $f(x) \to +\infty$ i $g(x) \to +\infty$ lub $f(x) \to -\infty$ i $g(x) \to -\infty$.

Stosujemy podstawienia $u(x) = 1/f(x)$ i $v(x) = 1/g(x)$. Wówczas $u(x) \to 0$ i $v(x) \to 0$.

Mamy wówczas

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{u(x)} - \frac{1}{v(x)} = \frac{v(x) - u(x)}{u(x)v(x)}$$

jest to wyrażenie typu 0/0.

Przykład

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right)$$

Rozwiązanie

Jest to wyrażenie typu ∞ - ∞, gdzie $f(x) = 1/(e^x - 1)$, $g(x) = 1/x$, stąd $u(x) = e^x - 1$, $v(x) = x$. Zatem, po podstawieniu do wzoru (które zresztą jest równoznaczne ze sprowadzeniem do wspólnego mianownika) i dwukrotnym zastosowaniu reguły de l'Hospitala mamy:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - e^x}{e^x - 1 + xe^x} = \lim_{x\to 0}\frac{-e^x}{e^x + e^x + xe^x} = -\frac{1}{2}$$

Wyrażenie typu ∞·0

Uwaga : Zastosowanie reguły de L'Hospitala do obliczania granic wyrażeń nieoznaczonych postaci: $0\cdot\infty$ to zastosowanie następujących przekształceń :

Przekształcenie :

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = [0\cdot\infty] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] \end{cases}$$

Przykład

Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}\pi}\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)\mathrm{tg}x$$

ĆWICZENIA 7 – TEORIA (Reguła de l'Hospitala)

Rozwiązanie.

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}\pi}(x-\frac{1}{2}\pi)\mathrm{tg}x=\lim_{x\to\frac{1}{2}\pi}\frac{(x-\frac{1}{2}\pi)}{\mathrm{ctg}x}=\lim_{x\to\frac{1}{2}\pi}\frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=-1$$

Wyrażenie typu ∞^0, 0^0, 1^∞.

Rozpatrzmy wyrażenie $(f(x))^{g(x)}$.

1. Jeśli przy $x\to c$ mamy $f(x)\to\pm\infty$ i jednocześnie $g(x)\to 0$, to wyrażenie $f(x)^{g(x)}$ jest dla $x = c$ wyrażeniem nieoznaczonym postaci ∞^0.
2. Jeśli przy $x\to c$ mamy $f(x)\to 0$ i jednocześnie $g(x)\to 0$, to wyrażenie $f(x)^{g(x)}$ jest dla $x = c$ wyrażeniem nieoznaczonym postaci 0^0.
3. Jeśli przy $x\to c$ mamy $f(x)\to 1$ i jednocześnie $g(x)\to\pm\infty$, to wyrażenie $f(x)^{g(x)}$ jest dla $x = c$ wyrażeniem nieoznaczonym postaci 1^∞.

W każdym z tych przypadków

$\ln(f(x)^{g(x)}) = g(x)\ln(f(x))$ jest dla $x = c$ wyrażeniem postaci $\infty\cdot 0$, które może być rozwiązywane metodami omówionymi wcześniej, z tym, że trzeba pamiętać o następującej zależności:

Jeśli $\lim_{x\to c}(\ln y)=\mathrm{L}$, to $\lim_{x\to c} y=\lim_{x\to c} e^{\ln y}=e^{\mathrm{L}}$

Przykład

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\mathrm{tg}x)^{\mathrm{tg}2x}$ ($\infty^{\mathbf{0}}$),

Rozwiązanie:

Jeżeli ograniczymy się do sąsiedztwa $\pi/2$, np. do przedziału $\pi/4 < x < \pi/2$,

to $\mathrm{tg}x\to\infty$ a $\mathrm{tg}2x\to 0$, zatem mamy wyrażenie ∞^0.

$\ln(\mathrm{tg}x)^{\mathrm{tg}2x} = \mathrm{tg}2x\cdot\ln(\mathrm{tg}x)$ jest wyrażeniem $0\cdot\infty$

Stosując odpowiednie przekształcenie oraz regułę de l'Hospitala otrzymujemy:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\mathrm{tg}2x\cdot\ln(\mathrm{tg}x))=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln(\mathrm{tg}x)}{\mathrm{ctg}2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{1}{\mathrm{tg}x}\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{-2}{\cos^2 2x}}=-2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\sin x\cos x)=0$$

ĆWICZENIA 7 – TEORIA (Reguła de l'Hospitala)

Zatem $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\mathrm{tg}x)^{\mathrm{tg}2x} = e^0 = 1$

<u>**Przykład**</u>

$\lim\limits_{x \to 0^+} x^x \quad (0^0)$,

Rozwiązanie:

$\ln(x^x) = x \cdot \ln x$. jest to wyrażenie $0 \cdot \infty$.

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$

Zatem $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x = e^0 = 1$

<u>**Przykład**</u>

$\lim\limits_{x \to 0} (1+3x)^{\frac{1}{2x}} \quad (1^\infty)$.

Rozwiązanie:

$\ln(1+3x)^{1/(2x)} = (1/(2x))\ln(1+3x)$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x)}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{3}{1+3x}}{2} = \lim_{x \to 0} \frac{3}{(1+3x)} = \frac{3}{2}$$

zatem $\lim\limits_{x \to 0} (1+3x)^{\frac{1}{2x}} = e^{\frac{3}{2}}$