ĆWICZENIA 8 – TEORIA (Pochodne wyższych rzędów, przebieg zmienności funkcji)

BADANIE PRZEBIEGU ZMIENNOŚCI FUNKCJI

- **Badanie przebiegu zmienności funkcji**

1. Dziedzina i zbiór wartości funkcji.
2. Punkty przecięcia z osiami układu, parzystość lub nieparzystość.
3. Granice funkcji, asymptoty wykresu funkcji.
4. Pierwsza pochodna – przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne.
5. Druga pochodna – przedziały wklęsłości i wypukłości, punkty przegięcia.
6. Tabelka
7. Szkic wykresu.

BADANIE PRZEBIEGU ZMIENNOŚCI FUNKCJI – PRZYKŁAD

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$$

Ad 1.

Dziedzina funkcji

Mianowniki muszą być różne od zera, stąd: $x \neq 0$, a zatem $D_f = \Re \setminus \{0\} = (-\infty;0) \cup (0;\infty)$.

Zbiór wartości funkcji

$W_f = \Re$

Ad 2.

Punkty przecięcia z osiami układu

<u>Punkt leży na osi x</u> , gdy: $f(x) = 0$, stąd

$x^2 + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 + 1}{x} = 0$; ułamek jest równy 0 wówczas, gdy jego licznik jest równy 0, a zatem: $x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Zatem do wykresu funkcji należy punkt (-1;0)

<u>Punkt leży na osi y</u> , gdy $f(0)$ istnieje dla rozważanej funkcji. Ponieważ w naszym przypadku 0 nie należy do dziedziny funkcji, stąd $f(0)$ - punkt przecięcia z osią y nie istnieje .

Parzystość lub nieparzystość

Warunek parzystości $f(-x) = f(x)$ nie jest spełniony, stąd funkcja nie jest parzysta.

Warunek nieparzystości $f(-x) = -f(x)$ nie jest spełniony, stąd funkcja nie jest nieparzysta.

Ad 3.

Granice funkcji, asymptoty wykresu funkcji

<u>Granice</u> na końcach przedziałów określoności funkcji

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 + \frac{1}{x} = \infty - 0 = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} x^2 + \frac{1}{x} = \infty + 0 = \infty$$

<u>Asymptota pionowa</u> istnieje, gdy w punktach nieokreśloności granica funkcji jest równa $\pm\infty$:

$$\lim_{x \to 0^-} x^2 + \frac{1}{x} = 0 - \infty = -\infty$$

semestr 1

ĆWICZENIA 8 – TEORIA (Pochodne wyższych rzędów, przebieg zmienności funkcji)

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 + \frac{1}{x} = 0 + \infty = \infty$$

Czyli funkcja ma asymptotę pionową o równaniu $x = 0$.

<u>Asymptota pozioma</u> : Funkcja ma asymptotę poziomą $y = a$, gdy istnieje granica funkcji w nieskończoności. Ponieważ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, zatem asymptota pozioma nie istnieje.

<u>Asymptota ukośna</u> : $y = mx + n$, gdzie $m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ i $n = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - mx\right]$.

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 + \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+1}{x^2} = -\infty$$

, stąd asymptota ukośna nie istnieje (analogicznie w przypadku granicy w $+\infty$).

Ad 4.

Pierwsza pochodna – przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne

<u>Pierwsza pochodna:</u>

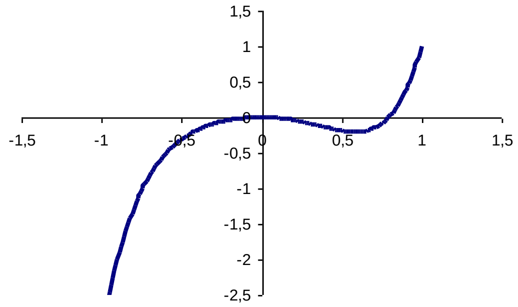
$$f'(x) = \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)' = \left(x^2 + x^{-1}\right)' = 2x - x^{-2} = 2x - \frac{1}{x^2},$$

a dziedzina pochodnej pokrywa się z dziedziną funkcji, czyli $D_{f'} = \Re \setminus \{0\} = (-\infty;0) \cup (0;\infty)$

<u>Przedziały monotoniczności</u>:

Funkcja jest <u>rosnąca</u> w przedziale, jeżeli $f'(x) > 0$ w tym przedziale:

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{1}{x^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3-1}{x^2} > 0$. Ponieważ znak ilorazu jest zawsze równy znakowi iloczynu, stąd $\frac{2x^3-1}{x^2} > 0 \Leftrightarrow x^2\left(2x^3-1\right) > 0$. Ponieważ wielomian $x^2\left(2x^3-1\right)$ ma dwa miejsca zerowe: 0 i $\sqrt[3]{0{,}5}$ (pamiętamy, że 0 nie należy do dziedziny pochodnej ani funkcji), a jego wykres wygląda następująco:



stąd $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (\sqrt[3]{0{,}5}; \infty)$

Funkcja jest <u>malejąca</u> w przedziale, jeżeli $f'(x) < 0$ w tym przedziale:

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{1}{x^2} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3-1}{x^2} < 0 \Leftrightarrow x^2\left(2x^3-1\right) < 0$, czyli $x \in (-\infty;0) \cup (0, \sqrt[3]{0{,}5})$.

<u>Ekstremum lokalne:</u>

Funkcja ma ekstremum lokalne lub punkt przegięcia w punkcie $(x_0; y_0)$, jeżeli pochodna funkcji w tym punkcie równa się zero. Jeżeli ponadto w otoczeniu punktu $(x_0; y_0)$ pochodna zmienia znak (z dodatniego na ujemny lub odwrotnie), to w punkcie $(x_0; y_0)$ jest ekstremum. Jeżeli znak zmienia się z dodatniego na ujemny to jest to MAXIMUM, a jeśli z ujemnego na dodatnie, to MINIMUM.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-\frac{1}{x^2}=0 \Leftrightarrow \frac{2x^3-1}{x^2}=0 \Leftrightarrow 2x^3-1=0 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{0,5}.$$

Dla rozważanej funkcji jest tylko jeden punkt w którym może być ekstremum, jest to $x=\sqrt[3]{0,5}$. Ponieważ na lewo od tego punktu, czyli dla $x\in(-\infty;0)\cup(0,\sqrt[3]{0,5})$ $f'(x)<0$, natomiast na prawo od niego, czyli dla $x\in(\sqrt[3]{0,5};\infty)$ $f'(x)>0$, czyli w otoczeniu punktu następuje zmiana znaku pochodnej z ujemnego na dodatni. Tak więc dla $x_0=\sqrt[3]{0,5}$ mamy minimum lokalne funkcji. Dalej należy obliczyć wartość funkcji w tym punkcie, czyli:

$$y_0=f(\sqrt[3]{0,5})=\sqrt[3]{0,5}^{\,2}+\frac{1}{\sqrt[3]{0,5}}\approx 1{,}9$$

Ad 5.

Druga pochodna – przedziały wklęsłości i wypukłości, punkty przegięcia

Druga pochodna:

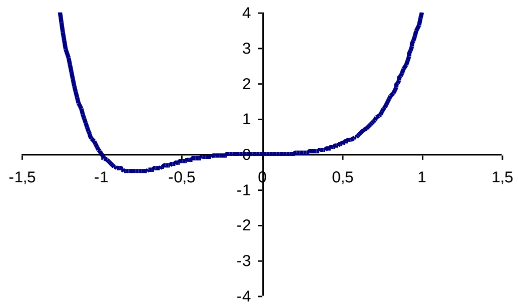
$$f''(x)=\left[\left(x^2+\frac{1}{x}\right)'\right]'=\left[\left(x^2+x^{-1}\right)'\right]'=\left(2x-x^{-2}\right)'=2+2x^{-3}=2+\frac{2}{x^3}=\frac{2x^3+2}{x^3}$$

dziedzina drugiej pochodnej pokrywa się z dziedziną funkcji i z dziedziną pierwszej pochodnej czyli $D_{f''}=\Re\setminus\{0\}=(-\infty;0)\cup(0;\infty)$.

Przedziały wklęsłości:

Funkcja jest wklęsła jeżeli $f''(x)<0$

$$f''(x)<0 \Leftrightarrow \frac{2x^3+2}{x^3}<0 \Leftrightarrow x^3\left(2x^3+2\right)<0 \Leftrightarrow 2x^3(x+1)\left(x^2-x+1\right)<0.$$ Wielomian $2x^3(x+1)\left(x^2-x+1\right)$ o następującym wykresie:



przyjmuje wartości ujemne dla $x\in(-1;0)$, czyli w tym przedziale funkcja jest wklęsła.

Funkcja jest wypukła jeżeli $f''(x)>0$

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow \frac{2x^3+2}{x^3}>0 \Leftrightarrow x^3\left(2x^3+2\right)>0 \Leftrightarrow 2x^3(x+1)\left(x^2-x+1\right)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(0;\infty).$$

Punkty przegięcia:

Warunkiem wystarczającym istnienia punktu przegięcia w $(x_0;y_0)$ jest istnienie drugiej pochodnej funkcji równej zeru w tym punkcie ($f''(x)=0$), oraz zmiana znaku drugiej pochodnej w otoczeniu tego punktu.

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2x^3+2}{x^3}=0 \Leftrightarrow 2x^3+2=0 \Leftrightarrow 2(x+1)\left(x^2-x+1\right)=0 \Leftrightarrow x=-1.$$

A zatem jedynie w punkcie $x_0=-1$ może istnieć punkt przegięcia funkcji. Ponieważ dla $x\in(-\infty;-1)$ $f''(x)>0$, natomiast dla $x\in(-1;0)$ $f''(x)<0$, stąd w otoczeniu $x_0=-1$ następuje

zmiana znaku drugiej pochodnej, a więc w tym punkcie funkcja ma punkt przegięcia.
Obliczamy wartość funkcji dla x_0 =-1:

$$y_0 = f(-1) = \sqrt[3]{-1}^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{-1}} = 0.$$

Ad 6.
Tabela
W tabeli umieszczamy wszystkie wyznaczone we wcześniej punkty i przedziały między nimi:

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;\sqrt[3]{0{,}5})$	$\sqrt[3]{0{,}5}$	$(\sqrt[3]{0{,}5};\infty)$
$f(x)$	+	0	-	nie istnieje	+	$\approx 1{,}9$	+
$f'(x)$	– ↘ (f. malejąca)	– ↘ (f. malejąca)	– ↘ (f. malejąca)	nie istnieje	– ↘ (f. malejąca)	0	+ ↗ (f. rosnąca)
$f''(x)$	+ (f. wypukła)	0	- (f. wklęsła)	nie istnieje	+ (f. wypukła)	+ (f. wypukła)	+ (f.wypukła)
uwagi	malejąca i wypukła	punkt przegięcia	Malejąca i wklęsła	asymptota pionowa x=0	malejąca i wypukła	minimum lokalne	rosnąca i wypukła

Ad 7.
Wykres