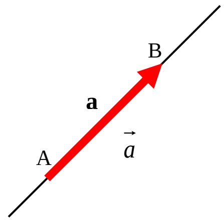
I WEKTORY

Definicja 1: Zbiór $\mathbf{R}^n$ z działaniem dodawania wektorów i mnożenia ich przez liczby rzeczywiste nazywamy *n -wymiarową rzeczywistą przestrzenią wektorową*.

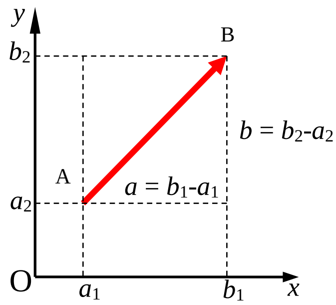


Definicja 2: *Wektor* to uporządkowana para punktów. Wektor o początku A i końcu B oznaczamy $\overrightarrow{AB}$ lub małymi literami: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ lub **a**, **b**, **c**.

Długość (wartość) wektora $\overrightarrow{AB}$ oznaczamy $|\overrightarrow{AB}| = |\mathbf{a}|$.

Przykład:

1) Wektor w przestrzeni dwuwymiarowej $\mathbf{R}^2$. Niech punkt A=(a_1, a_2) będzie początkiem wektora, punkt B=(b_1, b_2) jego końcem. Współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ wyznaczamy odejmując odpowiednie współrzędne początku od współrzędnych końca tego wektora: $a = b_1 - a_1$, $b = b_2 - a_2$.



$\overrightarrow{AB} = \mathbf{u} = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Wektor transponowany to : $\mathbf{u}^T = \mathbf{u}' = [a, b]$.

2) Wektor w przestrzeni trójwymiarowej $\mathbf{R}^3$. Niech punkt A=(a_1, a_2, a_3) będzie początkiem wektora, punkt B=(b_1, b_2, b_3) – koniec wektora. Współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ wyznaczamy odejmując odpowiednie współrzędne początku od współrzędnych końca tego wektora:

$a = b_1 - a_1$, $b = b_2 - a_2$, $c = b_3 - a_3$. Czyli $\overrightarrow{AB} = \mathbf{u} = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ (transpozycja $\mathbf{u}^T = \mathbf{u}' = [a, b, c]$).

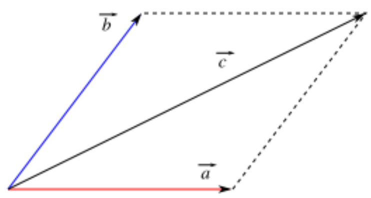
3) Wektor w przestrzeni n-wymiarowej $\mathbf{R}^n$. Początek wektora A=(a_1, a_2,...., a_n), koniec wektora B=(b_1, b_2,...., b_n) .

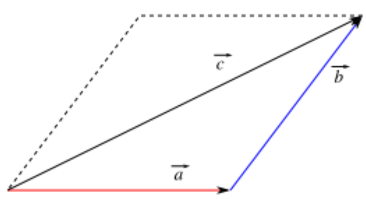
$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{u} = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ .... \\ b_n - a_n \end{bmatrix}.$$

Wzory : Działania na wektorach

1) *Suma* wektorów $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$.

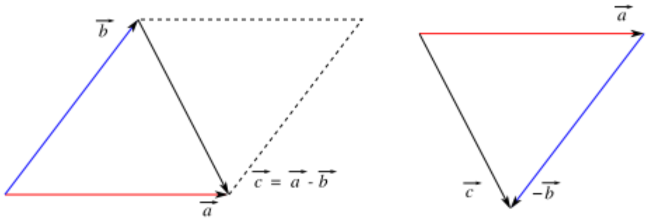
graficzna metoda sumowania wektorów





2) *Różnica* wektorów $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ \dots \\ a_n - b_n \end{bmatrix}$.

graficzna metoda odejmowania wektorów



3) *Iloczyn* wektora przez skalar $\vec{c} = k\vec{a} = k\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \dots \\ ka_n \end{bmatrix}$.

4) *Wektor transponowany do wektora* $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$ to - $\vec{a}^T = \vec{a}' = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n]$

Własności działań na wektorach:

1) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
2) $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$
3) $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$
4) $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = (-\mathbf{a}) + \mathbf{a} = \mathbf{0}$
5) $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\,\mathbf{a} + k\,\mathbf{b}$
6) $(k+h)\mathbf{a} = k\mathbf{a} + h\mathbf{a}$
7) $(kh)\mathbf{a} = k(h\mathbf{a})$
8) $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$

<u>Wersory :</u> W przestrzeni dwuwymiarowej są to wektory $\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ oraz $\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

w przestrzeni trójwymiarowej to $\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ oraz $\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Przykład : Przedstaw wektor $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$ w postaci kombinacji liniowej odpowiednich wersorów.

$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix} = 7\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-3)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$ =7**i**+(-3)**j**

II NORMA WEKTORA

<u>Norma</u> (długość) wektora określona jest wzorem $|\mathbf{a}| = \begin{cases} \sqrt{a_1^2 + a_2^2} & \text{gdy} \quad \mathbf{a} \in \mathbf{R}^2 \\ \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} & \text{gdy} \quad \mathbf{a} \in \mathbf{R}^3 \\ \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} & \text{gdy} \quad \mathbf{a} \in \mathbf{R}^n \end{cases}$

III ILOCZYN SKALARNY

<u>Iloczyn skalarny wektorów</u> określony jest wzorem:

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = \begin{cases} a_1b_1 + a_2b_2 & \text{gdy} \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^2 \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 & \text{gdy} \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^3 \\ a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n & \text{gdy} \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^n \end{cases}$$

Jeśli α jest kątem miedzy niezerowymi wektorami **a** i **b**, to iloczyn skalarny można zapisać w postaci :

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\alpha.$$