ĆWICZENIA 2 – TEORIA (typy macierzy, działania na macierzach)

I TYPY MACIERZY

Definicja 1: *Macierzą rzeczywistą* wymiaru $m\times n$, gdzie $m,\ n\in IN$ nazywamy prostokątną tablicę złożoną z m·n liczb rzeczywistych, ustawionych w m wierszach i n kolumnach.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Typy macierzy

1) *Macierz zerowa* – macierz, której elementami są zera tzn. $a_{ij}=0$ dla $1\le i\le m$ oraz $1\le j\le n$; oznaczamy $\mathbf{0}_{m\times n}$.
2) *Macierz kwadratowa* – macierz o takiej samej liczbie wierszy i kolumn, tzn. $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{1\le i,j\le n}$. O elementach a_{ii} tej macierzy mówimy, że leżą na *głównej przekątnej (diagonalnej)*.
3) *Macierz diagonalna* – macierz kwadratowa, której elementy poza główną przekątną (elementy pozadiagonalne) są zerami.
$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$
4) *Macierz jednostkowa* – macierz diagonalna, której elementy leżące na głównej przekątnej (elementy diagonalne) są równe jeden.
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$
5) *Macierze trójkątne*

dolna (dolnotrójkątna)
$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

górna (górnotrójkątna)
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

6) *Macierz transponowana* – $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ macierz otrzymana przez zamianę miejscami wierszy i kolumn macierzy **A.** Na przykład jeśli:
$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix},\ \text{to} \qquad \mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

II DZIAŁANIA NA MACIERZACH

1) *DODAWANIE I ODEJMOWANIE*

Niech **A** = $[a_{ij}]$ i **B** = $[b_{ij}]$ będą macierzami wymiaru $m \times n$. *Sumą (różnicą) macierzy* **A** i **B** nazywamy macierz **C** = $[c_{ij}]$, (co zapisujemy **C** = **A** ± **B**), której elementy określone są wzorem:

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij},$$

dla $1 \le i \le m$ oraz $1 \le j \le n$.

Przykład:

Niech $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$. Oblicz **C**=**A**+**B** oraz **D**=**A**-**B**:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2+1 & 3+2 & 1+4 \\ 3+3 & 4+4 & 5+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 6 & 8 & 12 \end{bmatrix}; \mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2-1 & 3-2 & 1-4 \\ 3-3 & 4-4 & 5-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

2) *MNOŻENIE PRZEZ LICZBĘ*

Niech **A** = $[a_{ij}]$ będzie macierzą wymiaru $m \times n$ oraz niech α będzie liczbą rzeczywistą. *Iloczynem macierzy* **A** *przez liczbę* α nazywamy macierz **B** = $[b_{ij}]$, (co zapisujemy **B** = α **A**), której elementy określone są wzorem:

$$b_{ij} = \alpha\, a_{ij},$$

dla $1 \le i \le m$ oraz $1 \le j \le n$.

Przykład:

Niech $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. Oblicz **B**=2**A**:

$$\mathbf{B} = 2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2\cdot 2 & 2\cdot 3 & 2\cdot 1 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 4 & 2\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}.$$

Własności dodawania macierzy i mnożenia macierzy przez liczbę

Niech **A**, **B**, **C** będą macierzami tego samego wymiaru oraz niech α, β będą liczbami rzeczywistymi. Wówczas:

1) **A** + **B** = **B** + **A**;
2) A+ (**B** + **C**) = (**A** + **B**) + **C**;
3) **A** + **0** = **0** + **A** = **A;**
4) **A** + (−**A**) = **0**;
5) α (**A** + **B**) = α **A** + α **B;**
6) (α + β)**A** = α **A** + β **A**;
7) 1 · **A** = **A**;
8) (α β)**A** = α (β **A**).

3) *ILOCZYN MACIERZY*

Macierz **A** można pomnożyć przez macierz **B** tylko wtedy, gdy liczba kolumn macierzy **A** jest równa liczbie wierszy macierzy **B**.
Niech macierz **A** = $[a_{i'j'}]$ ma wymiar $m \times n$, a macierz **B** = $[b_{i''j''}]$ ma wymiar $n \times p$. *Iloczynem macierzy* **A i B** nazywamy macierz **C** = $[c_{ij}]$ wymiaru $m \times p$, co zapisujemy **C** = **AB**, której elementy określone są wzorem:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

dla $1 \le i \le m$ oraz $1 \le j \le p$.

ĆWICZENIA 2 – TEORIA (typy macierzy, działania na macierzach)

Przykład:

1) Znaleźć iloczyn macierzy **A** i **B** dla $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ oraz $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Zauważmy, że liczba kolumn macierzy **A** jest równa liczbie wierszy macierzy **B**, a zatem macierze te można pomnożyć. Macierz **C**, którą otrzymamy będzie miała tyle wierszy co macierz **A** i tyle kolumn co macierz **B**: $\mathbf{A}_{4\times 2} \cdot \mathbf{B}_{2\times 3} = \mathbf{C}_{4\times 3}$, czyli

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{c_{11}} & \boxed{c_{12}} & \boxed{c_{13}} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} \end{bmatrix}, \text{ gdzie } c_{ij} = \sum_{k=1}^{2} a_{ik} b_{kj} \, (i = 1,2,3,4; j = 1,2,3).$$

Liczymy kolejne elementy pierwszego wiersza macierzy **C**:

$$\boxed{c_{11}} = \sum_{k=1}^{2} a_{1k} b_{k1} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = -1,$$

$$\boxed{c_{12}} = \sum_{k=1}^{2} a_{1k} b_{k2} = a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 2,$$

$$\boxed{c_{13}} = \sum_{k=1}^{2} a_{1k} b_{k3} = a_{11} b_{13} + a_{12} b_{23} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11$$

i dalej elementy kolejnych wierszy macierzy **C**:

$c_{21} = 0 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = -3,$ $\quad c_{22} = 0 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 0,$ $\quad c_{23} = 0 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 12,$

$c_{31} = -1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = -2,$ $\quad c_{32} = -1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = -2,$ $\quad c_{33} = -1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 1,$

$c_{41} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) = -2,$ $\quad c_{42} = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 4,$ $\quad c_{43} = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 22.$

Otrzymaliśmy macierz $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 11 \\ -3 & 0 & 12 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 22 \end{bmatrix}$.

2) Dla $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$: $\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 4 \\ 7 & 18 & 10 \end{bmatrix}$

Własności iloczynu macierzy

1) Niech macierz **A** ma wymiar $m \times n$, a macierze **B** i **C** wymiar $n \times p$. Wówczas:
   $$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}.$$
2) Niech macierze **A** i **B** maja wymiar $m \times n$, a macierz **C** wymiar $n \times p$. Wówczas:
   $$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}.$$
3) Niech macierz **A** ma wymiar $m \times n$, a macierz **B** wymiar $n \times p$ oraz niech α będzie liczbą rzeczywistą. Wówczas:
   $$\mathbf{A}(\alpha \mathbf{B}) = (\alpha \mathbf{A})\mathbf{B} = \alpha \mathbf{AB}.$$
4) Niech macierz **A** ma wymiar $m \times n$, macierz **B** wymiar $n \times p$, a macierz **C** wymiar $p \times q$. Wówczas:
   $$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}).$$
5) Niech macierz **A** ma wymiar $m \times n$. Wówczas:
   $$\mathbf{A}\mathbf{I}_n = \mathbf{I}_m\mathbf{A}.$$

III RZĄD MACIERZY

Definicja 2

Rzędem macierzy **A** nazywamy maksymalną liczbę liniowo niezależnych wektorów (wierszy lub kolumn) tej macierzy i oznaczamy przez rz**A**.

Rząd macierzy można zdefiniować jeszcze w inny sposób:

Definicja 3

Rząd macierzy jest to najwyższy stopień niezerowego wyznacznika kwadratowej podmacierzy (minora) tej macierzy (najwyższy stopień jej nieosobliwej podmacierzy) (patrz ćwiczenia 3 i 4).

W praktyce obliczanie rzędu macierzy sprowadza się do przekształcenia macierzy **A** do postaci bazowej (definicja poniżej), przy pomocy operacji elementarnych.

Definicja 4

Postać bazowa macierzy (macierz bazowa) dla macierzy **A** :

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_k & \mathbf{R} \\ \hline \mathbf{0}_1 & \mathbf{0}_2 \end{array}\right]$$

gdzie $\mathbf{I}_k$ jest macierzą jednostkową stopnia k, zaś $\mathbf{0}_1$ i $\mathbf{0}_2$ są macierzami zerowymi.

Twierdzenie Każdą macierz **A** można za pomocą ciągu operacji elementarnych przekształcić do macierzy bazowej, która zawiera podmacierz jednostkową stopnia k. Wtedy rz**A**=k.
(Stopień k macierzy jednostkowej **I** otrzymanej w lewym górnym rogu macierzy określa rząd macierzy).

Przekształcenia elementarne dla obliczania rzędu macierzy

1) Dodanie do wiersza innego wiersza pomnożonego przez liczbę różną od zera.
   - $W_i \to W_i + cW_j$ będzie oznaczać operację dodania do i-tego wiersza wiersza j-tego pomnożonego przez liczbę c (różną od zera).
2) Dodanie do kolumny innej kolumny pomnożonej przez liczbę różną od zera.
   - $K_i \to K_i + cK_j$ będzie oznaczać operację dodania do i-tej kolumny kolumny j-tej, pomnożonej przez liczbę c (różną od zera).
3) Pomnożenie kolumny przez liczbę różną od zera.
   - $K_i \to cK_i$ będzie oznaczać operację pomnożenia i-tej kolumny przez liczbę c (różną od zera).
4) Pomnożenie wiersza przez liczbę różną od zera.
   - $W_i \to cW_i$ będzie oznaczać operację pomnożenia i-tego wiersza przez liczbę c (różną od zera).
5) Zamiana miejscami dwóch kolumn.
   - $K_i \leftrightarrow K_j$ będzie oznaczać operację zamienienia miejscami i-tej i j-tej kolumny.
6) Zamiana miejscami dwóch wierszy.
   - $W_i \leftrightarrow W_j$ będzie oznaczać operację zamienienia miejscami i-tego i j-tego wiersza.

Wymienione wyżej przekształcenia elementarne nie zmieniają rzędu macierzy.

Przykład:

1) Obliczyć rząd macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{W_2 \to W_2 + W_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{W_3 \to W_3 - 2W_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

W lewym górnym rogu otrzymaliśmy macierz jednostkową stopnia 2, stąd $rz\mathbf{A} = 2$.

2) Obliczyć rząd macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{W_2 \to W_2 - W_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{W_3 \to W_3 - 2W_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{W_4 \to W_4 - 3W_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{W_4 \to W_4 + W_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{K_3 \leftrightarrow K_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Stąd $rz\mathbf{A} = 3$.