ĆWICZENIA 3 i 4 – TEORIA (wyznacznik, macierz odwrotna)

I WYZNACZNIK

Definicja 1

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej nazywamy funkcję, która każdej macierzy rzeczywistej kwadratowej **A** = (a_{ij}) przyporządkowuje liczbę rzeczywistą det**A**. Funkcja ta określona jest wzorem indukcyjnym:

1) Jeżeli **A** ma stopień $n = 1$, to det**A** = a_{11};
2) Jeżeli macierz **A** ma stopień n, to

$$\det \mathbf{A} = a_{i1} D_{i1} + a_{i2} D_{i2} + \ldots + a_{in} D_{in}$$

lub

$$\det \mathbf{A} = a_{1j} D_{1j} + a_{2j} D_{2j} + \ldots + a_{nj} D_{nj}$$

gdzie $1 \le i, j \le n$, a symbol D_{ij} oznacza dopełnienie algebraiczne elementu a_{ij}.

Definicja 2

Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} macierzy **A** nazywamy liczbę

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ij}$$

gdzie $\mathbf{A}_{ij}$ oznacza macierz stopnia $n - 1$ otrzymaną z macierzy **A** przez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Przykład:

Niech $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Na przykład $\mathbf{A}_{13}$ powstanie przez skreślenie pierwszego wiersza i trzeciej kolumny macierzy **A:**

$$\mathbf{A}_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

OBLICZANIE WYZNACZNIKÓW

Wyznacznik macierzy kwadratowej **A** oznaczany jest przez det **A** lub przez | **A** |.

1) *Wyznacznik stopnia 2* – wg wzoru:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Przykład:

Niech $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Obliczamy wyznacznik macierzy **A**:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2$$

2) *Wyznacznik stopnia 3* – *metoda Sarrusa*:

$$\det \mathbf{A} = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

Przykład:

Niech $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Obliczamy wyznacznik macierzy **A**:

ĆWICZENIA 3 i 4 – TEORIA (wyznacznik, macierz odwrotna)

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{matrix} = (1\cdot 3\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 4 + 1\cdot 2\cdot 2) - (4\cdot 3\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 2) = 15 - 18 = -3$$

3) *Wyznaczniki stopnia większego niż 3* – metoda zwana *rozwinięciem Laplace'a*:

W tym przypadku korzystamy z jednego ze wzorów z punktu 2 definicji 1
(det **A** = $a_{i1} D_{i1} + a_{i2} D_{i2} + \ldots + a_{in} D_{in}$ lub det **A** = $a_{1j} D_{1j} + a_{2j} D_{2j} + \ldots + a_{nj} D_{nj}$).

Przykład:

Niech $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Obliczamy wyznacznik macierzy **A**:

Obliczanie wyznacznika stopnia większego niż 3 zaczynamy od wybrania wiersza lub kolumny na bazie której będziemy obliczać wyznacznik. Zazwyczaj, dla skrócenia obliczeń, wybieramy taki wiersz albo taką kolumnę, w której jest najwięcej zer. Wybierzmy zatem trzecią kolumnę.
W pierwszym kroku zapisujemy wzór na wyznacznik macierzy **A**:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \boxed{1} & 1 \\ 2 & 3 & \boxed{2} & 2 \\ 3 & 1 & \boxed{0} & 3 \\ 4 & 2 & \boxed{1} & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot D_{13} + 2\cdot D_{23} + 0\cdot D_{33} + 1\cdot D_{43} = 1\cdot D_{13} + 2\cdot D_{23} + 1\cdot D_{43}$$

Następnie obliczamy wartość dopełnień algebraicznych D_{i3}:

$$D_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{matrix} =$$

$$= (2\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot 3\cdot 4 + 2\cdot 3\cdot 2) - (2\cdot 1\cdot 4 + 2\cdot 3\cdot 2 + 3\cdot 3\cdot 1) = 21$$

$$D_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{matrix} =$$

$$= (-1)[(1\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 3\cdot 4 + 1\cdot 3\cdot 2) - (1\cdot 1\cdot 4 + 1\cdot 3\cdot 2 + 2\cdot 3\cdot 1)] = -15$$

$$D_{43} = (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{matrix} =$$

$$= (-1)[(1\cdot 3\cdot 3 + 2\cdot 2\cdot 3 + 1\cdot 2\cdot 1) - (1\cdot 3\cdot 3 + 1\cdot 2\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 3)] = 0$$

Teraz wystarczy podstawić obliczone wartości do wzoru:

$$\det \mathbf{A} = 1\cdot D_{13} + 2\cdot D_{23} + 1\cdot D_{43} = 1\cdot 21 + 2\cdot(-15) + 1\cdot 0 = -9$$

4) *Wyznaczniki dowolnego stopnia* – sprowadzanie do macierzy *dolno* lub *górnotrójkątnej*:
W tej metodzie wykorzystujemy własności wyznaczników.

ĆWICZENIA 3 i 4 – TEORIA (wyznacznik, macierz odwrotna)

WŁASNOŚCI WYZNACZNIKÓW

1) Wyznacznik macierzy kwadratowej zawierającej kolumnę (wiersz) złożoną z samych zer jest równy 0;
2) Wyznacznik macierzy kwadratowej mającej dwie (dwa) jednakowe kolumny (wiersze) jest równy 0;
3) Wyznacznik macierzy kwadratowej zmienia znak, jeżeli przestawimy między sobą dwie kolumny (dwa wiersze);
4) Jeżeli wszystkie elementy pewnej kolumny (wiersza) macierzy kwadratowej zawierają wspólny czynnik, to czynnik ten można wyłączyć przed wyznacznik tej macierzy;
5) Wyznacznik macierzy kwadratowej, w której elementy pewnej kolumny (wiersza) są sumami dwóch składników jest równy sumie wyznaczników macierzy, w których elementy tej kolumny (wiersza) są zastąpione tymi składnikami;
6) Wyznacznik macierzy nie zmieni się, jeżeli do elementów dowolnej kolumny (wiersza) dodamy odpowiadające im elementy innej kolumny (wiersza) tej macierzy przemnożone przez dowolną liczbę;
7) Wyznaczniki macierzy i macierzy transponowanej są równe.
8) Wyznacznik macierzy trójkątnej jest równy iloczynowi jej elementów diagonalnych.
9) Wyznacznik iloczynu macierzy jest równy iloczynowi wyznaczników det $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=(\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$.

Z powyższych własności (zwłaszcza własności 6 i 8) korzystamy w szczególności podczas obliczania wyznaczników macierzy dużych stopni.

Wprowadźmy na początek następujące oznaczenia dla operacji elementarnych stosowanych podczas obliczania wyznaczników.

Operacje elementarne dla obliczania wyznaczników

1) Dodanie do wiersza innego wiersza pomnożonego przez liczbę różną od zera.
   - $W_i \to W_i + cW_j$ będzie oznaczać operację dodania do i-tego wiersza, wiersza j-tego pomnożonego przez liczbę c (różną od zera).
2) Dodanie do kolumny innej kolumny pomnożonej przez liczbę różną od zera.
   - $K_i \to K_i + cK_j$ będzie oznaczać operację dodania do i-tej kolumny, kolumny j-tej, pomnożonej przez liczbę c (różną od zera).
3) Pomnożenie kolumny przez liczbę różną od zera.
   - $K_i \to cK_i$ będzie oznaczać operację pomnożenia i-tej kolumny przez liczbę c (z punktu 4 własności wynika, że jeżeli mnożymy kolumnę przez stałą to cały wyznacznik musimy pomnożyć przez jej odwrotność).
4) Pomnożenie wiersza przez liczbę różną od zera.
   - $W_i \to cW_i$ będzie oznaczać operację pomnożenia i-tego wiersza przez liczbę c (z punktu 4 własności wynika, że jeżeli mnożymy wiersz przez stałą to cały wyznacznik musimy pomnożyć przez jej odwrotność).

ĆWICZENIA 3 i 4 – TEORIA (wyznacznik, macierz odwrotna)

Przykład:

Niech $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -4 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$**.** Oblicz wyznacznik macierzy **A** poprzez sprowadzenie jej do postaci dolnotrójkątnej.

Element a_{11} macierzy **A** jest równy 3. Dla ułatwienia obliczeń zamieńmy więc miejscami wiersz pierwszy i drugi. Jak wiemy z własności 3, taka operacja spowoduje zmianę znaku wyznacznika na przeciwny

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -4 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -4 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Następnie, przy pomocy operacji elementarnych, przekształcamy macierz tak, aby wszystkie jej elementy znajdujące się na prawo od głównej przekątnej były równe 0:

$$\det \mathbf{A} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -4 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{K_2 \to (-3)K_1 + K_2} (-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & -9 & -4 & -1 & 0 \\ 2 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{W_2 \to \left(-\frac{1}{4}\right)W_2}$$

Mnożymy drugi wiersz przez $-\frac{1}{4}$, czyli cały wyznacznik musimy pomnożyć przez odwrotność tej liczby, czyli przez -4.

$$(-1)(-4)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ -1 & 5 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & -9 & -4 & -1 & 0 \\ 2 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{K_5 \to \left(\frac{1}{4}\right)K_2 + K_5} (-1)(-4)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -2 & 0 & \frac{13}{4} \\ 3 & -9 & -4 & -1 & -\frac{9}{4} \\ 2 & -6 & -2 & 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \xrightarrow{K_5 \to \left(\frac{13}{8}\right)K_3 + K_5}$$

$$(-1)(-4)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -9 & -4 & -1 & -\frac{35}{4} \\ 2 & -6 & -2 & 0 & -\frac{15}{4} \end{vmatrix} \xrightarrow{K_5 \to \left(-\frac{35}{4}\right)K_4 + K_5} (-1)(-4)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -9 & -4 & -1 & 0 \\ 2 & -6 & -2 & 0 & -\frac{15}{4} \end{vmatrix}$$

Stąd $\det \mathbf{A} = (-1)(-4)\cdot 1 \cdot 1 \cdot (-2)\cdot(-1)\cdot\left(-\frac{15}{4}\right) = -30$

Definicja 3

Macierzą nieosobliwą nazywamy taką macierz kwadratową **A**, dla której $\det \mathbf{A} \neq 0$**.**

ĆWICZENIA 3 i 4 – TEORIA (wyznacznik, macierz odwrotna)

II MACIERZ ODWROTNA

Definicja 4

Macierzą odwrotną do macierzy kwadratowej $\mathbf{A}$ nazywamy taką macierz $\mathbf{A}^{-1}$, że

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

gdzie **I** jest macierzą jednostkową tego samego stopnia co macierz **A.**

Uwaga: Tylko macierze nieosobliwe (det A≠0) posiadają macierz odwrotną.

Uwaga: Wyznacznik macierzy odwrotnej jest równy odwrotności wyznacznika $\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det \mathbf{A}}$.

METODY WYZNACZANIA MACIERZY ODWROTNEJ

1) *równanie macierzowe* jeśli macierz **A** jest stopnia *n*, to

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

Elementy macierzy $\mathbf{A}^{-1}$ wyznaczamy z równania macierzowego $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$.

2) *ze wzoru*

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}\left[D_{ij}\right]^T,$$

gdzie $\left[D_{ij}\right]^T$ jest transpozycją macierzy złożonej z dopełnień algebraicznych, czyli macierzy

$$\left[D_{ij}\right] = \begin{bmatrix} D_{11} & \cdots & D_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{n1} & \cdots & D_{nn} \end{bmatrix}$$

Przykład:

Niech $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Wyznacz macierz odwrotną.

Tego typu zadania zawsze rozpoczynamy od obliczenia wyznacznika macierzy **A**. W naszym przypadku $\det \mathbf{A} = 1$, czyli mamy do czynienia z macierzą nieosobliwą i można wyznaczyć jej odwrotność. Macierz **A** jest rzędu 3, zatem musimy obliczyć dopełnienia algebraiczne 9 elementów:

$$D_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad D_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad D_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$D_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad D_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad D_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -3, \quad D_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad D_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Obliczone dopełnienia algebraiczne podstawiamy do wzoru i otrzymujemy:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sprawdzamy, czy uzyskaliśmy prawidłowy wynik:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & -3\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

i

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 1 & -3\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

3) *Algorytm odwracania macierzy* (*metoda eliminacji Gaussa-Jordana*)

W tej metodzie wykorzystywać będziemy następujące dwa twierdzenia:

Twierdzenie Jeżeli macierz kwadratowa **A** jest macierzą nieosobliwą (det**A**≠0), to istnieje ciąg przekształceń elementarnych sprowadzających tę macierz do macierzy jednostkowej.
Twierdzenie Jeżeli ciąg przekształceń elementarnych sprowadza nieosobliwą macierz kwadratową stopnia n do macierzy jednostkowej stopnia n, to ten sam ciąg przekształceń elementarnych sprowadza tą samą macierz jednostkową do macierzy $\mathbf{A}^{-1}$ (przekształcenia dokonujemy tylko na wierszach).
Jeżeli w trakcie przekształceń elementarnych otrzymamy wiersz lub kolumnę zerową tzn., że macierz odwrotna nie istnieje.

Wykorzystywać będziemy zatem następujące przekształcenia elementarne:

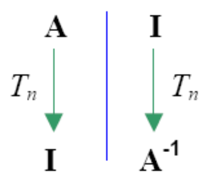
Przekształcenia elementarne dla obliczania macierzy odwrotnej

1) Dodanie do wiersza innego wiersza pomnożonego przez liczbę różną od zera.
   - $W_i \to W_i + cW_j$ będzie oznaczać operację dodania do i-tego wiersza wiersza j-tego pomnożonego przez liczbę c (różną od zera).
2) Pomnożenie wiersza przez liczbę różną od zera.
   - $W_i \to cW_i$ będzie oznaczać operację pomnożenia i-tego wiersza przez liczbę c.
3) Zamiana miejscami dwóch wierszy.
   - $W_i \leftrightarrow W_j$ będzie oznaczać operację zamienienia miejscami i-tego i j-tego wiersza

Przykład:

Niech $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$. Wyznacz macierz odwrotną metodą eliminacji Gaussa-Jordana

Macierz odwrotną metodą Gaussa-Jordana wyznacza się korzystając ze schematu przedstawionego po prawej stronie. Czyli zaczniemy od zapisania łącznie macierzy **A** i macierzy jednostkowej **I** (oddzielamy je pionową kreską)



$$[\mathbf{A}|\mathbf{I}]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}-1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right].$$

Następnie będziemy wykonywać operacje elementarne (tylko na wierszach) utworzonej macierzy klatkowej, tak aby po lewej stronie uzyskać macierz jednostkową.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{W_1 \to W_1 + W_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{W_2 \to W_2 - 2W_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[W_2 \to -W_2]{W_3 \to W_3 - 2W_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{W_3 \to W_3 - W_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{W_1 \leftrightarrow W_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Uzyskaliśmy macierz klatkową, w której po lewej stronie jest macierz jednostkowa, natomiast po prawej stronie jest macierz odwrotna do macierzy **A**:

$$\left[\mathbf{I} \middle| \mathbf{A}^{-1}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right], \qquad \text{stąd} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sprawdzamy, czy uzyskaliśmy prawidłowy wynik:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$