I UKŁAD RÓWNAŃ

Definicja 1 *Układ* m *równań liniowych* z n niewiadomymi $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Definicja 2 *Postać macierzowa* układu równań:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}},$$

lub krócej **Ax** = **b**, gdzie:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Macierz **A** nazywamy *macierzą układu równań*, wektor **b** nazywamy *wektorem wyrazów wolnych* (kolumną wyrazów wolnych).

Definicja 3 *Macierzą rozszerzoną* układu równań liniowych nazywać będziemy macierz układu z dołączoną kolumną wyrazów wolnych

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

II ROZW. UKŁADU RÓWNAŃ PRZY POMOCY MACIERZY ODWROTNEJ

Do rozwiązywania układu równań z wykorzystaniem macierzy odwrotnej potrzebna nam będzie postać macierzowa tego układu. Ponadto muszą być spełnione następujące warunki:

1) Macierz **A** musi być kwadratowa.
2) Macierz **A** musi być macierzą nieosobliwą, czyli jej wyznacznik musi być różny od zera, det**A**≠0.

Uwaga Warunek 2) jest równoważny warunkowi 3):

3) Rząd macierzy **A** musi być równy jej wymiarowi, tzn. rz**A** = n.

<u>Algorytm rozwiązywania układu równań przy pomocy macierzy odwrotnej:</u>

1) Zapisujemy układ równań liniowych w postaci macierzowej **Ax** = **b**, gdzie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

2) Sprawdzamy czy macierz **A** jest nieosobliwa
3) Wyznaczamy macierz odwrotną $\mathbf{A}^{-1}$.
4) Rozwiązanie układu równań jest postaci $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

<u>Przykład</u>:
Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ \quad x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

1) Zapisujemy układ równań liniowych w postaci macierzowej **Ax** = **b**, gdzie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

2) Sprawdzamy czy macierz **A** jest nieosobliwa

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

Wyznacznik macierzy det**A**≠0, zatem macierz **A** jest nieosobliwa.

3) Wyznaczamy macierz odwrotną $\mathbf{A}^{-1}$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4) Rozwiązanie układu równań jest postaci $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 0\cdot 3 \\ 2\cdot 1 + 1\cdot 2 - 2\cdot 3 \\ -1\cdot 1 + 0\cdot 2 + 1\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

zatem

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

czyli rozwiązaniem układu równań jest trójka $x_1=3$, $x_2=-2$ i $x_3=2$.

III ROZW. UKŁADU RÓWNAŃ PRZY POMOCY WZORÓW CRAMERA

Podobnie jak w poprzednim paragrafie, w przypadku rozwiązywania układu równań z wykorzystaniem wzorów Cramera przydatna jest postać macierzowa tego układu. Ponadto muszą być spełnione następujące warunki:

ĆWICZENIA 5 i 6 – TEORIA (układy równań, wzory Cramera, metoda eliminacji Gaussa)

1) Macierz **A** musi być kwadratowa.
2) Macierz **A** musi być macierzą nieosobliwą, czyli det**A**≠0.

Algorytm rozwiązywania układu równań przy pomocy wzorów Cramera:

1) Zapisujemy układ równań liniowych w postaci macierzowej **Ax** = **b**.
2) Obliczamy wyznacznik macierzy **A**, det**A** (należy pamiętać, że musi być spełniony warunek det**A**≠0).

$$\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3) Obliczamy wyznaczniki macierzy $\mathbf{A}_{x_i}$ dla i=1,2,…,n. Macierze $\mathbf{A}_{x_i}$ powstają poprzez zastąpienie i-tej kolumny macierzy **A**, kolumną wyrazów wolnych.

$$\det\mathbf{A}_{x_1}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\ \det\mathbf{A}_{x_2}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\ \ldots,\ \det\mathbf{A}_{x_n}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}.$$

4) Korzystamy z twierdzenia Cramera, mówiącego, że jeżeli det**A**≠0 to układ równań posiada jednoznaczne rozwiązanie, które jest dane za pomocą wzorów:

$$x_1=\frac{\det\mathbf{A}_{x_1}}{\det\mathbf{A}},\ x_2=\frac{\det\mathbf{A}_{x_2}}{\det\mathbf{A}},\ \ldots,\ x_n=\frac{\det\mathbf{A}_{x_n}}{\det\mathbf{A}}.$$

Przykład:

Rozwiąż układ równań korzystając ze wzorów Cramera

$$\begin{cases} -x_1+12x_2+x_3=-6 \\ -2x_1+6x_2-2x_3=0 \\ -4x_1+24x_2-x_3=6 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

1) Zapisujemy układ równań liniowych w postaci macierzowej **Ax** = **b**, gdzie

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -1 & 12 & 1 \\ -2 & 6 & -2 \\ -4 & 24 & -1 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

2) Obliczamy wyznacznik macierzy **A**

$$\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix} -1 & 12 & 1 \\ -2 & 6 & -2 \\ -4 & 24 & -1 \end{vmatrix}=6.$$

3) Obliczamy wyznaczniki macierzy $\mathbf{A}_{x_i}$ dla i=1,2,3

$$\text{det\`{}}\mathbf{A}_{x_1}=\begin{vmatrix} -6 & 12 & 1 \\ 0 & 6 & -2 \\ 6 & 24 & -1 \end{vmatrix}=-432,\ \det\mathbf{A}_{x_2}=\begin{vmatrix} -1 & -6 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -4 & 6 & -1 \end{vmatrix}=-60,\ \det\mathbf{A}_{x_3}=\begin{vmatrix} -1 & 12 & -6 \\ -2 & 6 & 0 \\ -4 & 24 & 6 \end{vmatrix}=252.$$

4) Rozwiązaniem równania jest trójka

$$x_1 = \frac{\det \mathbf{A}_{x_1}}{\det \mathbf{A}} = \frac{-432}{6} = -72, \qquad x_2 = \frac{\det \mathbf{A}_{x_2}}{\det \mathbf{A}} = \frac{-60}{6} = -10, \quad x_3 = \frac{\det \mathbf{A}_{x_3}}{\det \mathbf{A}} = \frac{252}{6} = 42.$$

IV ROZW. UKŁADU RÓWNAŃ METODĄ ELIMINACJI GAUSSA

Dwie wyżej opisane metody rozwiązywania układów równań liniowych mogą być stosowane jedynie w przypadku, gdy układ ma dokładnie tyle niewiadomych ile występuje w nim równań, a ponadto macierz tego układu jest macierzą nieosobliwą. Niżej zostanie przedstawiona metoda rozwiązywania układów równań, która może być stosowana ZAWSZE, w przypadku dowolnego układu, bez czynienia dodatkowych założeń. A zatem metoda ta jest metodą uniwersalną.

Postać zredukowana macierzy

Mówimy, że macierz **A** jest w *postaci zredukowanej*, jeżeli są spełnione następujące warunki:

1) Począwszy od pewnego wiersza wszystkie następne wiersze macierzy składają się z samych zer. Powyżej tego wiersza nie ma wierszy składających się z samych zer
2) W każdym niezerowym wierszu pierwszy od lewej niezerowy wyraz jest równy 1. Czasami nazywa się go *wiodącą jedynką wiersza*. W przykładach wiodące jedynki zaznaczone są czerwonymi ramkami.
3) Jeżeli dwa sąsiednie wiersze nie są złożone z samych zer, to wiodąca jedynka wyższego wiersza znajduje się na lewo od wiodącej jedynki niższego wiersza.

Przykład:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 5 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

Operacje elementarne dla eliminacji Gaussa

1) Zamiana miejscami dwóch wierszy macierzy.
   - $W_i \leftrightarrow W_j$ będzie oznaczać zamianę miejscami wiersza W_i z wierszem W_j.
2) Pomnożenie wiersza macierzy przez liczbę różną od zera.
   - $W_i \rightarrow cW_i$ będzie oznaczać operację mnożenia i-tego wiersza przez liczbę c różną od zera.
3) Dodanie do wiersza innego wiersza pomnożonego przez liczbę różną od zera.
   - $W_i \rightarrow W_i + cW_j$ będzie oznaczać operację dodania do i-tego wiersza wiersza j-tego pomnożonego przez liczbę c (różną od zera).

Algorytm rozwiązywania układu równań metodą eliminacji Gaussa

1) Zapisujemy macierz rozszerzoną układu równań

$$[\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

2) Przy pomocy przekształceń elementarnych wykonywanych wyłącznie na wierszach, sprowadzamy macierz rozszerzoną do postaci zredukowanej (postać zredukowaną musimy

stworzyć z macierzy **A**, wektor wyrazów wolnych (za pionową kreską) może mieć postać dowolną).

- Aby to zrobić, w pierwszej kolejności przestawiamy wiersze macierzy rozszerzonej tak, aby w pierwszej kolumnie pierwszego wiersza był element niezerowy, najlepiej 1.
- Jeżeli w wyniku przestawienia wierszy nie da się uzyskać 1 w pierwszym wierszu pierwszej kolumny (element a_{11}), to dzielimy pierwszy wiersz przez ten element ($W_i \to (1/a_{11})W_i$). W ten sposób uzyskujemy 1 w pierwszej kolumnie pierwszego wiersza.
- Następnie wykorzystujemy jedynkę otrzymaną w powyższy sposób do uzyskania zer w pierwszej kolumnie pozostałych wierszy.
- Podobnie jak w kroku pierwszym otrzymujemy jedynkę w następnej kolumnie następnego wiersza i zera w pozostałych wierszach tej kolumny.
- itd., aż do uzyskania postaci zredukowanej macierzy **A**.

3) Rozstrzygamy istnienie rozwiązań układu. Tu możliwe są trzy sytuacje:

<u>*Układ sprzeczny*</u>: Jeśli w zredukowanej postaci macierzy rozszerzonej występuje wiersz postaci

$$[0, 0, \ldots, 0 \,|\, k], \qquad k \neq 0$$

<u>*Układ nieoznaczony*</u> <u>*(nieskończenie wiele rozwiązań)*</u>: Jeśli w zredukowanej postaci macierzy rozszerzonej występuje wiersz składający się wyłącznie z elementów zerowych lub m<n.

<u>*Jednoznaczne rozwiązanie*</u>: W pozostałych przypadkach przekształcenia prowadzą do macierzy postaci $[\mathbf{I}_n | \mathbf{r}]$, gdzie $\mathbf{I}_n$ jest macierzą jednostkową stopnia n a **r** jest wektorem rozwiązań układu.

<u>**Przykład**</u>: (jednoznaczne rozwiązanie)
Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ \qquad x_2 + 5x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

1) Zapisujemy macierz rozszerzoną układu równań:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

2) Przy pomocy operacji elementarnych sprowadzamy macierz do postaci zredukowanej:

- Zamieniamy miejscami pierwszy i trzeci wiersz, aby uzyskać 1 (wiodąca jedynka – w czerwonej ramce) w pierwszej kolumnie pierwszego wiersza

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{W_1 \leftrightarrow W_3} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

- Wykorzystujemy tak uzyskaną jedynkę do uzyskania zer w pierwszej kolumnie pozostałych wierszy. (Do wiersza trzeciego dodajemy wiersz pierwszy pomnożony przez -3. Zwróćmy uwagę, że wiersz pierwszy zostaje bez zmian.)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{W_3 \to W_3 - 3W_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 5 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -4 \end{array}\right]$$

- W drugiej kolumnie drugiego wiersza jest liczba $a_{22}=1$ (wiodąca jedynka – w czerwonej ramce), więc nie musimy wykonywać dodatkowych operacji aby ją uzyskać. Aby uprościć obliczenia podzielimy trzeci wiersz przez -4 (pomnożymy przez -1/4), a następnie przy pomocy wiodącej jedynki drugiego wiersza, czyli elementu $a_{22}=1$, uzyskamy zera w drugiej kolumnie pozostałych wierszy macierzy

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{W_3 \to -\frac{1}{4}W_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{W_1 \to W_1 - 2W_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{W_3 \to W_3 - W_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right]$$

- Tworzymy wiodącą jedynkę 1 w trzecim wierszu trzeciej kolumny i wykorzystujemy ją do uzyskania zer w pozostałych wierszach tej kolumny. (Zaczynamy od pomnożenia ostatniego wiersza przez -1/3.)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{W_3 \to -\frac{1}{3}W_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{W_2 \to W_2 - 5W_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{W_1 \to W_1 + 7W_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

3) Jak widać w wyniku przekształceń elementarnych sprowadziliśmy macierz do postaci jednostkowej, a zatem układ ma jednoznaczne rozwiązanie. Rozwiązanie to odczytujemy pamiętając, że kolejnym kolumnom macierzy „odpowiadają" kolejne zmienne, czyli

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \begin{bmatrix} 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 \\ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A zatem rozwiązaniem jest trójka $x_1=2$, $x_2=-1$, $x_3=1$.

<u>Przykład</u>: (układ nieoznaczony)
Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_5 + 2x_6 = 11 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 + 6x_6 = 5 \\ {}_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_5 + 3x_6 = 16 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 4x_5 - x_6 = -9 \end{cases}$$

Jak widać w tym przypadku liczba równań jest mniejsza niż liczba niewiadomych, a zatem układ ten może być albo sprzeczny, albo posiadać nieskończenie wiele rozwiązań.

1) Rozwiązywanie układu rozpoczynany od utworzenia macierzy rozszerzonej tego układu:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 2 & 11 \\ 2 & 4 & -2 & 1 & 6 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 3 & 16 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & -4 & -1 & -9 \end{array}\right]$$

2) Przekształcamy macierz układu do postaci zredukowanej:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 0 & 2 & 2 & 11 \\ 2 & 4 & -2 & 1 & 6 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 3 & 16 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & -4 & -1 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{W_2 \to W_2 - 2W_1} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & -4 & -17 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 3 & 16 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & -4 & -1 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{W_3 \to W_3 - W_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -4 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 5 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & -4 & -1 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{W_4 \to W_4 + W_1} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -4 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{W_4 \to W_4 + W_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -4 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -15 \end{array}\right] \xrightarrow{W_4 \to -\frac{1}{3} W_4} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -4 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{W_4 \to W_4 - W_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -4 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{W_1 \to W_1 - 2W_3} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -4 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{W_2 \to W_2 + 4W_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

3) Odczytujemy rozwiązanie:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{bmatrix} 1x_1 + 2x_2 - 1x_3 + 0x_4 + 2x_5 + 0x_6 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 2x_5 + 0x_6 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Czyli

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 - 1x_3 + 2x_5 = 1 \\ 1x_4 + 2x_5 = 3 \\ 1x_6 = 5 \end{cases}$$

4) Z tej postaci wyznaczamy x_1, x_4 i x_6:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2x_2 + x_3 - 2x_5 \\ x_4 = 3 - 2x_5 \\ x_6 = 5 \end{cases}$$

Widzimy, że x_2, x_3 i x_5 są parametrami, a x_1, x_4 i x_6 można wyrazić za pomocą tych parametrów (innymi słowy, za x_2, x_3 i x_5 możemy podstawić dowolne liczby rzeczywiste, aby otrzymać poprawne rozwiązanie układu).

5) Przyjęło się, że w miejsce x_2, x_3 i x_5 wstawiamy np. a, b i c (aby podkreślić, że to parametry). Otrzymujemy rozwiązanie:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2a + b - 2c \\ x_4 = 3 - 2c \\ x_6 = 5 \end{cases} \qquad \text{gdzie} \qquad a,b,c \in \mathbf{R}$$

Przykład: (brak rozwiązań)
Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 2x_1 + 7x_2 + 12x_3 = 40 \end{cases}$$

1) Macierz rozszerzona:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 40 \end{array}\right]$$

2) Przekształcenia elementarne

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 40 \end{array}\right] \xrightarrow{W_1 \to \frac{1}{2}W_1} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 40 \end{array}\right] \xrightarrow{W_2 \to W_2 - 4W_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 2 & 7 & 12 & 40 \end{array}\right] \xrightarrow{W_3 \to W_3 - 2W_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & 6 & 22 \end{array}\right] \xrightarrow{W_3 \to W_3 + W_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right]$$

3) Patrząc na ostatni wiersz macierzy możemy z niego odczytać, że 0=10. Jest to oczywiście sprzeczność. Układ nie ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych.