ĆWICZENIA 7– TEORIA (wektory własne i wartości własne)

I WEKTOR WŁASNY I WARTOŚĆ WŁASNA

Niech **A** będzie macierzą kwadratową stopnia *n*, wówczas :

Definicja 1

Wektor własny macierzy **A** to taki niezerowy wektor **v**, dla którego istnieje taka wartość $\lambda \in \mathbf{R}$, że zachodzi równość:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$$

Wartość λ nazywamy *wartością własną* macierzy.

Przykład:

Niech $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Wektor **v** jest wektorem własnym macierzy **A**, odpowiadającym wartości własnej $\lambda = 1$, gdyż

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Intuicyjnie można rozumieć wektor własny jako taki wektor, którego kierunek nie zmienia się po przemnożeniu go przez macierz. Natomiast jego długość zmienia się tyle razy ile wynosi wartość własna odpowiadająca temu wektorowi.

Definicja 2

Macierzą charakterystyczną macierzy **A** nazywamy macierz postaci $\mathbf{A}- \lambda\, \mathbf{I}$, gdzie $\lambda \in \mathbf{R}$, natomiast **I** oznacza macierz jednostkową.

Przykład:

Niech $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Macierz charakterystyczna macierzy **A** jest postaci:

$$\mathbf{A}- \lambda\, \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 0-\lambda \end{bmatrix}$$

Definicja 3

Wielomianem charakterystycznym macierzy **A** nazywamy wyznacznik z jej macierzy charakterystycznej, to jest:

$$\det(\mathbf{A}- \lambda\, \mathbf{I})$$

Przykład:

Niech $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Obliczmy wielomian charakterystyczny tej macierzy:

$$\det(\mathbf{A}- \lambda\, \mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 0-\lambda \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda)+1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1.$$

Stąd wielomian charakterystyczny macierzy A jest postaci $W(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$.

Wielomiany charakterystyczne wykorzystuje się do wyznaczania wartości własnych, a tym samym również wektorów własnych macierzy. Mówi o tym następujące twierdzenie:

Twierdzenie Wartości własne macierzy **A** są pierwiastkami jej wielomianu charakterystycznego:

$$\det(\mathbf{A}- \lambda\, \mathbf{I}) = 0$$

gdzie **I** oznacza macierz jednostkową, **A**- λ **I** macierz charakterystyczną, natomiast det (**A**- λ **I**) – wyznacznik macierzy charakterystycznej czyli wielomian charakterystyczny. Znając różne wartości własne λ_1, λ_2 ,…., λ_k k≤*n* można obliczyć odpowiadające im wektory własne $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,…., $\mathbf{v}_k$ rozwiązując następujące równania:

$$(\mathbf{A}- \lambda_i \mathbf{I})\cdot \mathbf{v}_i=0$$

ze względu na wektor $\mathbf{v}_i$.

Uwaga: Macierz **A** stopnia *n* może mieć maksymalnie *n* różnych wartości własnych.

Przykład:

Wyznacz wartości własne oraz odpowiadające im wektory własne dla macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aby wyznaczyć wartości własne należy w pierwszej kolejności wyznaczyć wielomian charakterystyczny macierzy:

$$\det(\mathrm{A}- \lambda\, \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 13\lambda - 12.$$

Z twierdzenia przedstawionego wyżej wiemy, że wartości własne są równe pierwiastkom wielomianu charakterystycznego, czyli obliczony wielomian musimy przyrównać do zera i znaleźć rozwiązania tak utworzonego równania:

$$W(\lambda) = -\lambda^3 + 13\lambda - 12 = 0,$$

co możemy również zapisać jako:

$$W(\lambda) = -\lambda^3 + 13\lambda - 12 = -(\lambda+4)(\lambda-1)(\lambda-3) = 0$$

Stąd

$$W(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \qquad (\lambda+4) = 0 \quad \text{lub} \quad (\lambda-1) = 0 \quad \text{lub} \quad (\lambda-3) = 0$$

Czyli

$$\lambda_1 = -4, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 3.$$

A zatem wielomian ten ma trzy pierwiastki.

Następnie dla każdej z wyliczonych wartości własnych szukamy odpowiadających jej wektorów własnych:

<u>dla</u> $\lambda_1 = -4$

$$(\mathbf{A} - (-4)\, \mathbf{I})\cdot \mathbf{v}_i=0$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ĆWICZENIA 7– TEORIA (wektory własne i wartości własne)

Jak wiemy det $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$=0, zatem układ nie ma jednoznacznego rozwiązania. Powyższy układ możemy rozwiązać w następujący sposób, stosując metodę eliminacji Gaussa

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{W_2 \to W_2 - \frac{3}{5}W_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{W_2 \to -5W_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{W_3 \to W_3 - W_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{W_1 \to W_1 + 3W_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{W_1 \to \frac{1}{5}W_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Tak więc dla parametru $\lambda_1 = -4$ układ ma rozwiązanie:

$$\begin{matrix} x_1 + 3x_3 = 0 \\ -x_2 + 5x_3 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -3x_3 \\ x_2 = 5x_3 \\ x_3 = t,\ t \in R \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -3t \\ x_2 = 5t \\ x_3 = t \end{matrix} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = t\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}\ t \in R$$

Czyli zbiór wektorów własnych odpowiadających wartości własnej $\lambda_1 = -4$ będzie postaci

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}\ t \in R.$$

W analogiczny sposób szukamy wektorów własnych odpowiadających kolejnym wartościom własnym.

<u>dla</u> $\lambda_2 = 1$

$$(\mathbf{A} - 1 \cdot \mathbf{I}) \cdot \mathbf{v}_i = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie układu :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{W_1 \leftrightarrow W_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[W_2 \to W_2 + W_3]{W_1 \to W_1 + W_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{matrix} 3x_1 - x_3 = 0 \\ -x_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = s \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 3s,\ s \in R \end{matrix} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix},\ s \in R$$

Zbiór wektorów własnych odpowiadających wartości własnej $\lambda_2 = 1$ jest postaci $\mathbf{v}_2 = s\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix},\ s \in R$.

<u>dla</u> $\lambda_3 = 3$

$$(\mathbf{A} - 3\cdot\mathbf{I})\cdot\mathbf{v}_i = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\3 & -2 & -1\\0 & -1 & 1\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-2 & 3 & 0\\3 & -5 & -1\\0 & -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Rozwiązanie układu :

$$\left[\begin{array}{ccc|c}-2 & 3 & 0 & 0\\3 & -5 & -1 & 0\\0 & -1 & -2 & 0\end{array}\right] \xrightarrow{W_1 \leftrightarrow W_2} \left[\begin{array}{ccc|c}3 & -5 & -1 & 0\\-2 & 3 & 0 & 0\\0 & -1 & -2 & 0\end{array}\right] \xrightarrow{W_1 \to W_1 + W_2} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & -1 & 0\\-2 & 3 & 0 & 0\\0 & -1 & -2 & 0\end{array}\right] \xrightarrow{W_2 \to W_2 + 2W_1}$$

$$\xrightarrow{W_3 \to W_3 + W_2} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & -1 & 0\\0 & -1 & -2 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \xrightarrow{W_2 \to -W_2} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & -1 & 0\\0 & 1 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \xrightarrow{W_1 \to W_1 + 2W_2} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 3 & 0\\0 & 1 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l}x_1 + 3x_3 = 0\\x_2 + 2x_3 = 0\end{array} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l}x_1 = -3x_3\\x_2 = -2x_3\\x_3 = q,\ q \in R\end{array} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{v}_3 = q\begin{bmatrix}-3\\-2\\1\end{bmatrix},\ q \in R.$$

Zbiór wektorów własnych odpowiadających wartości własnej $\lambda_3 = 3$ jest postaci $\mathbf{v}_3 = q\begin{bmatrix}-3\\-2\\1\end{bmatrix},\ q \in R$.

<u>**Uwaga:**</u> Jednej wartości własnej macierzy **A** może odpowiadać kilka zbiorów wektorów własnych.

<u>**Przykład:**</u>

Wyznacz wartości własne oraz odpowiadające im wektory własne dla macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 4\\0 & 3 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Analogicznie jak w poprzednim przykładzie zadanie zaczynamy od wyznaczenia wartości własnych, czyli od obliczenia pierwiastków wielomianu charakterystycznego macierzy:

ĆWICZENIA 7– TEORIA (wektory własne i wartości własne)

det (A- λ I)= $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\left((1-\lambda)^2-4\right) = -(\lambda-3)^2(\lambda+1).$

Stąd wielomian charakterystyczny ma dwa pierwiastki $\lambda_1 = 3$(jest to pierwiastek podwójny) oraz $\lambda_2 = -1$. Dla każdego z nich należy znaleźć odpowiadające im zbiory wektorów własnych:

<u>dla</u> $\lambda_1 = 3$

$$(\mathbf{A} - 3\cdot\mathbf{I})\cdot \mathbf{v}_i = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie układu :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[W_3 \leftrightarrow W_2]{W_1 \leftrightarrow W_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{W_2 \to W_2 + 2W_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$x_1 - 2x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = t \\ x_3 = s, \quad t,s \in R \end{array} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2s \\ t \\ s \end{bmatrix}, \ t,s \in R \Rightarrow$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2s \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s \\ 0 \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = s\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ t,s \in R$$

Stąd z wartością własną $\lambda_1 = 3$ związane są dwa zbiory wektorów:

$\mathbf{v}_{11} = s\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ oraz $\mathbf{v}_{12} = t\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $t,s \in R$.

<u>dla</u> $\lambda_2 = -1$

$$(\mathbf{A} + 1\cdot\mathbf{I})\cdot \mathbf{v}_i = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ĆWICZENIA 7– TEORIA (wektory własne i wartości własne)

Rozwiązanie układu :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{W_1 \leftrightarrow W_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[W_2 \to \frac{1}{4}W_2]{W_3 \to W_3 - 2W_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = q, \quad q \in R \end{array} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2q \\ 0 \\ q \end{bmatrix}, \; q \in R \Rightarrow \mathbf{v}_2 = q\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; q \in R$$

A zatem wartości własnej $\lambda_2 = -1$ odpowiada zbiór wektorów własnych postaci $\mathbf{v}_2 = q\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; q \in R$.

Definicja 3

Śladem macierzy **A** nazywamy sumę jej elementów diagonalnych:

$$\text{tr } \mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

Przykład:

Oblicz ślad macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ślad macierzy to tr $\mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 1+3+1=5$

Twierdzenie Niech **A** będzie macierzą kwadratową o wartościach własnych $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$:

$$\text{tr } \mathbf{A} = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$$

$$\det \mathbf{A} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$$

Przykład:

Pokaż, że wyznacznik macierzy **A** jest równy iloczynowi jej wartości własnych, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Zaczynamy od obliczenia wyznacznika macierzy **A**:

$$\det \mathbf{A} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right. = 3 - 12 = -9$$

Następnie obliczamy wartości własne macierzy A (patrz poprzednie przykłady): $\lambda_1 = 3$ (pierwiastek podwójny) i $\lambda_2 = -1$. Stąd

det **A**=3 · 3 · (-1)=-9.

ĆWICZENIA 7– TEORIA (wektory własne i wartości własne)

<u>Przykład:</u>

Pokaż, że ślad macierzy **A** jest równy sumie jej wartości własnych, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Ślad macierzy A jest równy:

tr $\mathbf{A}$=a_{11}+a_{22}+a_{33}=1+(-2)+1=0

Z poprzednich przykładów wiemy, że wartości własne tej macierzy to $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$. Zatem

tr $\mathbf{A}$= λ_1+ λ_2 + λ_3=(-4)+1+3=0.