

**ĆWICZENIA 4 – ZADANIA** (Granica i ciągłość funkcji, asymptoty)**Zadanie. 1.** Obliczyć granice funkcji

- a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 2x^2 - x - 1}{5x^3 + x - 4}$       b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x^2+3x+1}$       c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2-5x+6}{x-7}$       d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{4x^2 + 5x - 2} - 2x]$
- e)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+4}{x+2}$       f)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-1}{x-2}$       g)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-4x+3}{2x-6}$       h)  $\lim_{x \rightarrow 25} \frac{\sqrt{x}-5}{x-25}$
- i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}$       j)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{4x}$       k)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{4x}$       l)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x}$
- m)  $\lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}]$       n)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$       o)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$
- p)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-1}{x^2-1}$       q)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x$       r)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{x+3}$       s)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$
- t)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$       u)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$       w)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$       x)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$
- y)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4-3x^3+x-1}{x^2+x-1}$       z)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2+2} - 2x)$       aa)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$       ab)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5-x}{x+2}$

**Odp** a)3/5, b) 0 , c)  $-\infty$  ,d) 5/4 e) 2 f)  $\pm \infty$  ,g) 1 , h)1/10 , i) 1, j)3/4 , k) 1/4, l)  $\pm \infty$  , m)0, n)1/2, o)1/(2+2 $\sqrt{2}$ ) , p)2,q)1, r)1/2 s)0 t) -2/5 u)-1 w) 1/2 x) -1

**Zadanie. 3.** Znaleźć asymptoty pionowe, poziome i ukośne podanych funkcji ( o ile istnieją):

- a)  $f(x) = \frac{x}{1-x}$       b)  $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$       c)  $f(x) = \sqrt{x^2-1}$       d)  $f(x) = \frac{x}{\operatorname{arctg} x}$
- e)  $f(x) = \frac{x^3+8}{x^2-4}$       f)  $f(x) = x \ln \left(e + \frac{1}{x}\right)$       g)  $f(x) = \frac{2x-5}{2x-1}$       h)  $f(x) = \frac{3x^2}{x^2-4}$
- i)  $f(x) = \frac{2x^2-1}{x-3}$       j)  $f(x) = x - \frac{1}{x}$       k)  $f(x) = \frac{x^3-2x^2+1}{9-x^2}$       l)  $f(x) = \frac{3x^2-2x+1}{x^2+1}$

**Odp** a)asymptota pionowa obustronna  $x=1$ , pozioma  $y=-1$  w  $\pm \infty$  b) asymptota pionowa obustronna  $x=0$  pozioma  $y=0$  w  $\pm \infty$

c)pionowa- brak,ukośna  $y=x$  w  $+\infty$  oraz  $y=-x$  w  $-\infty$  d) asymptota pionowa-brak, ukośne  $y = \frac{2}{\pi}x + \frac{4}{\pi^2}$  w  $+\infty$  oraz

$y = -\frac{2}{\pi}x + \frac{4}{\pi^2}$  w  $-\infty$  e)asymptota pionowa obustronna  $x=2$ ,  $\pm \infty$  , ukośna  $y=x$  w  $\pm \infty$  f)asymptota pionowa lewostronna  $x=-\frac{1}{e}$  , ukośna

$y = x + \frac{1}{e}$  w  $\pm \infty$  .