

Ćwiczenia 1 – Zmienna losowa ciągła

Zadania

Zadanie 1

Dla jakiej wartości A funkcja

$$f(x) = \begin{cases} Ax^2 & \text{dla } x \in (0, 4), \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

jest funkcją gęstości zmiennej losowej X , opisującej masę (w kg) pojedynczego owocu w doświadczeniu szklarniowym?

Odp.: $A = \frac{3}{64}$

Zadanie 2

Czas wzrostu roślin (w tygodniach) ma gęstość:

$$f(x) = \begin{cases} 0,3(2 + x - x^2) & \text{dla } x \in (0, 2], \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Obliczyć:

$$P(|X - 1| < 0,5), \quad P(|X - 1| > 0,5), \quad P(X < 1), \quad P\left(X > \frac{3}{2}\right)$$

Wyznaczyć $E(X)$ oraz $D^2(X)$.

Odp.: $E(X) = 0,8$; $D^2(X) = 0,24$

Zadanie 3

Rozkład czasu (w godzinach) oczekiwania partii warzyw na rozładunek:

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{dla } x \in (0, 5), \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

- a) Wyznaczyć a .
- b) Obliczyć $P(2 < X < 4)$.
- c) Wyznaczyć $E(X)$, $D^2(X)$ oraz odchylenie standardowe.

Odp.: a) 0,2 b) 0,4 c) 2,5 2,08 1,44

Zadanie 4

Niech

$$f(x) = \begin{cases} C & \text{dla } x \in (3, 10), \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

- a) Wyznaczyć C oraz podać nazwę rozkładu.
- b) Obliczyć $P(X > 5)$ oraz $P(X \leq 8)$.
- c) Wyznaczyć $E(X)$ i $D^2(X)$.

Odp.: a) $1/7$ b) $5/7$ $5/7$ c) $13/2$ $49/12$

Wzory pomocnicze**Prawdopodobieństwo**

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

Wartość oczekiwana

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Wariancja

$$D^2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx$$

lub

$$D^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Podstawowe całki

$$\int a dx = ax + C$$

$$\int ax dx = \frac{a}{2} x^2 + C$$

$$\int ax^n dx = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

Ćwiczenia 1 – Zmienna losowa ciągła

Rozwiązania

Zadanie 1

Aby funkcja była gęstością, musi spełniać warunek normalizacji:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Ponieważ funkcja jest dodatnia tylko na $(0, 4)$:

$$\int_0^4 Ax^2 dx = 1$$

Korzystamy ze wzoru:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$A \frac{x^3}{3} \Big|_0^4 = 1$$

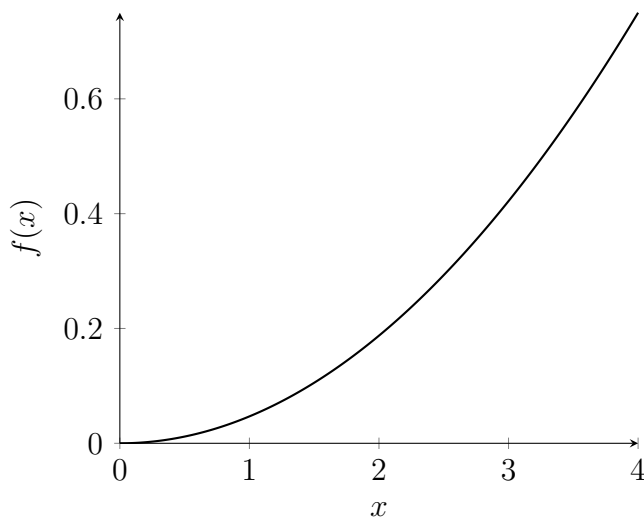
$$A \frac{64}{3} = 1$$

$$A = \frac{3}{64}$$

Komentarz: Zawsze całkujemy wyłącznie po przedziale, na którym funkcja jest dodatnia.

Wykres funkcji gęstości

Pole pod wykresem musi być równe 1.



Zadanie 2

Dana gęstość:

$$f(x) = 0,3(2 + x - x^2), \quad x \in (0, 2]$$

1. Obliczanie $P(|X - 1| < 0,5)$

Najpierw przekształcamy nierówność:

$$|X - 1| < 0,5 \iff 0,5 < X < 1,5$$

Z definicji:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

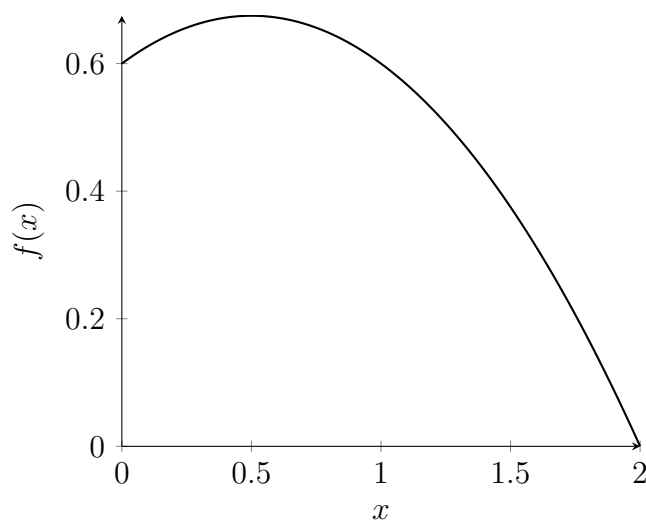
$$P = 0,3 \int_{0,5}^{1,5} (2 + x - x^2) dx$$

$$\int (2 + x - x^2) dx = 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

Po podstawieniu granic:

$$P = 0,65$$

Wykres funkcji gęstości



Pozostałe prawdopodobieństwa

$$P(|X - 1| > 0,5) = 1 - 0,65 = 0,35$$

$$P(X < 1) = 0,3 \int_0^1 (2 + x - x^2) dx = 0,5$$

$$P\left(X > \frac{3}{2}\right) = 0,3 \int_{1,5}^2 (2 + x - x^2) dx = 0,2$$

2. Wartość oczekiwana

$$E(X) = \int x f(x) dx$$

$$E(X) = 0,3 \int_0^2 (2x + x^2 - x^3) dx$$

$$E(X) = 0,8$$

3. Wariancja

Najpierw liczymy:

$$E(X^2) = 0,3 \int_0^2 x^2 (2 + x - x^2) dx = 0,88$$

$$D^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$D^2(X) = 0,88 - 0,64 = 0,24$$

Zadanie 3

Rozkład jednostajny na $(0, 5)$.

a) Wyznaczenie stałej

$$\int_0^5 a dx = 1$$

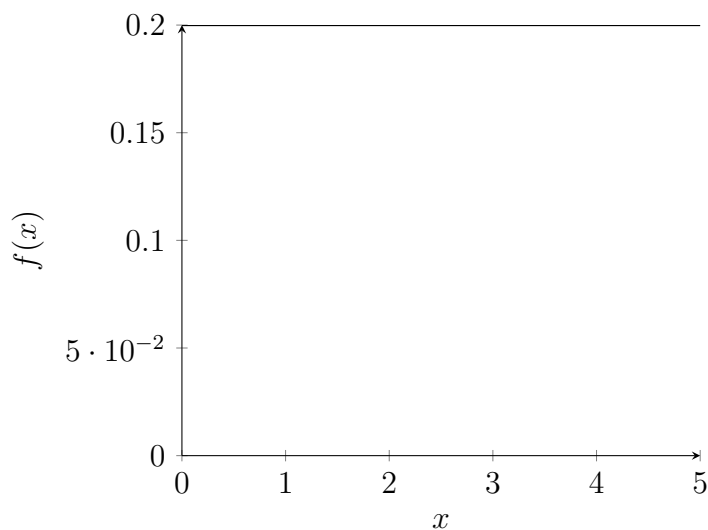
$$5a = 1 \Rightarrow a = 0,2$$

b) Prawdopodobieństwo

$$P(2 < X < 4) = \int_2^4 0,2 dx$$

$$= 0,2(4 - 2) = 0,4$$

Wykres funkcji gęstości



c) Parametry rozkładu jednostajnego

Dla rozkładu jednostajnego (a, b) :

$$E(X) = \frac{a + b}{2}$$

$$D^2(X) = \frac{(b - a)^2}{12}$$

$$E(X) = 2,5$$

$$D^2(X) = \frac{25}{12} = 2,08$$

$$\sigma = 1,44$$

Zadanie 4

Rozkład jednostajny na $(3, 10)$.

a)

$$C(10 - 3) = 1$$

$$C = \frac{1}{7}$$

b)

$$P(X > 5) = \frac{10 - 5}{7} = \frac{5}{7}$$

$$P(X \leq 8) = \frac{8 - 3}{7} = \frac{5}{7}$$

c)

$$E(X) = \frac{3 + 10}{2} = \frac{13}{2}$$

$$D^2(X) = \frac{49}{12}$$