Ćwiczenia 3 – Przedziały ufności

Zadania

Zadanie 1

W pewnym doświadczeniu chemicznym bada się ilość czystej substancji wydzielającej się w trakcie pewnego procesu. Przeprowadzono 5 obserwacji, aby ustalić rozrzut dla obserwowanej zmiennej o rozkładzie normalnym.

Uzyskano następujące wyniki (w mg):

$$285,\ 293,\ 302,\ 297,\ 291$$

- Oszacować wartość średnią.
- Oszacować wartość wariancji (zastosować estymator zgodny i nieobciążony).
- Przyjmując poziom ufności $1 - \alpha = 0{,}99$ wyznaczyć przedział ufności dla wartości średniej.
- Wyznaczyć przedział ufności dla wariancji.

Zadanie 2

W doświadczeniu polowym oceniano zasobność gleby w przyswajalny magnez (Mg) oznaczony metodą Egnera–Riehma. Wyniki podano w mg Mg/100 g gleby. Pomiary wykonano w 10 próbkach gleby pobranych z różnych miejsc badanego pola.

Uzyskano następujące wyniki:

$$4,6,\ 4,2,\ 4,3,\ 4,3,\ 4,1,\ 4,7,\ 4,4,\ 4,2,\ 4,3,\ 4,6$$

Wiedząc, że obserwowana zmienna podlega rozkładowi normalnemu $N(\mu, \sigma)$:

- Zbudować 90% przedział ufności dla rzeczywistej średniej zawartości magnezu w glebie.
- Zbudować 99% przedział ufności dla rzeczywistej średniej zawartości magnezu w glebie.

Zadanie 3

W laboratorium nasiennym analizowano liczbę nasion w 1 g materiału siewnego kłosowca anyżowego (*Agastache foeniculum*) produkowanego przez dwie firmy nasienne. [Liczba nasion w jednostce masy jest ważnym parametrem jakościowym, wykorzystywanym m.in. do określania norm wysiewu oraz do kontroli jakości partii nasion.]

Przyjęto, że liczba nasion w 1 g podlega rozkładowi normalnemu. Dla nasion produkowanych przez pierwszą firmę zmienna ma rozkład $N(\mu_1, \sigma)$, natomiast dla nasion drugiej firmy rozkład $N(\mu_2, \sigma)$.

W laboratorium wykonano po 5 oznaczeń liczby nasion w 1 g dla każdej partii.

Dla pierwszej firmy uzyskano wyniki:

$$2830,\ 2840,\ 2800,\ 2880,\ 2820$$

Natomiast dla drugiej firmy:

$$2790,\ 2720,\ 2770,\ 2780,\ 2760$$

- Przy poziomie ufności 0,99 wyznaczyć przedział ufności dla różnicy średnich liczby nasion w 1 g
$$(\mu_1 - \mu_2).$$

Zadanie 4

W doświadczeniu ogrodniczym analizowano zasobność podłoża torfowego w potas (K) oznaczony w laboratorium stacji chemiczno–rolniczej. Zawartość potasu podano w mg/dm^3 podłoża. Analizowano próbki pochodzące z dwóch gospodarstw ogrodniczych produkujących pomidora szklarniowego.

Zakłada się, że zawartość potasu w podłożu jest zmienną o rozkładzie normalnym. Z każdej plantacji pobrano po 8 próbek podłoża i wykonano analizę laboratoryjną.

Dla pierwszego gospodarstwa uzyskano wyniki:

$$198,1;\ 200,1;\ 200,7;\ 201,3;\ 198,5;\ 202,5;\ 201,9;\ 200,9$$

Natomiast dla drugiego gospodarstwa:

$$202,7;\ 201,5;\ 201,3;\ 201,1;\ 201,0;\ 199,7;\ 198,2;\ 199,7$$

- Przyjmując poziom ufności $1 - \alpha = 0{,}95$ zbudować przedział ufności dla różnicy średnich zawartości potasu w podłożu w obu gospodarstwach.

Zadanie 5

W doświadczeniu ogrodniczym oceniano zawartość ekstraktu cukrowego (Total Soluble Solids, TSS) w owocach truskawki odmiany *Brighton*. Zawartość cukrów oznaczano refraktometrycznie w stopniach Brix (°Bx).

W doświadczeniu wykonano 30 pomiarów zawartości ekstraktu w owocach. Zakłada się, że badana zmienna ma rozkład normalny $N(\mu, \sigma)$.

Na podstawie przeprowadzonych pomiarów uzyskano:

$$\bar{x} = 12, \qquad s^2 = 1{,}21, \qquad n = 30$$

- Przyjmując poziom ufności $1 - \alpha = 0{,}99$ zbudować przedział ufności dla średniej zawartości ekstraktu cukrowego μ w owocach truskawki.

Zadanie 6

W doświadczeniu szklarniowym monitorowano wilgotność objętościową podłoża (Volumetric Water Content, VWC) w uprawie roślin warzywnych prowadzonych w podłożu torfowym. Wilgotność mierzono przy użyciu czujnika wilgotności podłoża zintegrowanego z komputerem klimatycznym sterującym systemem nawadniania.

Zakłada się, że badana zmienna ma rozkład normalny $N(\mu, \sigma = 0{,}8)$.

Podczas pomiarów uzyskano następujące wartości wilgotności objętościowej podłoża (w % objętościowych):

$$20,4;\ 19,6;\ 22,1;\ 20,8;\ 19,2;\ 20,4;\ 20,9;\ 21,5;\ 22,0$$

- Wyznaczyć średnią wartość wilgotności podłoża.
- Przyjmując poziom ufności $1 - \alpha = 0{,}95$ zbudować przedział ufności dla średniej wilgotności objętościowej podłoża.

Podsumowanie

Zadanie	**Zmienna obserwowana**	**Typ przedziału**	**Użyty rozkład**	σ
1	Ilość czystej substancji wydzielonej w procesie chemicznym (mg)	dla średniej μ oraz dla wariancji σ^2	rozkład t-Studenta (dla μ), rozkład χ^2 (dla σ^2)	nieznane
2	Zawartość magnezu w glebie (mg Mg / 100 g gleby)	dla średniej μ	rozkład t-Studenta	nieznane
3	Liczba nasion kłosowca w 1 g materiału siewnego (dwie firmy)	dla różnicy średnich $(\mu_1 - \mu_2)$	rozkład t-Studenta	nieznane
4	Zawartość potasu w podłożu torfowym (mg/dm^3) w dwóch gospodarstwach	dla różnicy średnich $(\mu_1 - \mu_2)$	rozkład t-Studenta	nieznane
5	Zawartość ekstraktu cukrowego w owocach truskawki (°Bx)	dla średniej μ	rozkład t-Studenta	nieznane
6	Wilgotność objętościowa podłoża (VWC, %)	dla średniej μ	rozkład normalny	znane ($\sigma = 0{,}8$)

Wzory pomocnicze

Średnia:

$$\bar{x} = \hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Wariancja z próby (estymator nieobciążony):

$$\hat{s}^2 = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum x_i\right)^2\right]$$

Odchylenie standardowe:

$$\hat{s} = \sqrt{\hat{s}^2}$$

PRZEDZIAŁ UFNOŚCI DLA μ

σ znane

$$\bar{x} - u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

σ nieznane

$$\bar{x} - t_{\alpha,n-1} \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\alpha,n-1} \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}$$

PRZEDZIAŁ UFNOŚCI DLA $\mu_1 - \mu_2$

Założenie:

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

Najpierw obliczamy wspólny estymator wariancji:

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)\hat{s}_1^2 + (n_2 - 1)\hat{s}_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \qquad S_p = \sqrt{S_p^2}$$

Przedział ufności dla różnicy średnich:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\alpha,n_1+n_2-2} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < (\mu_1 - \mu_2) < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha,n_1+n_2-2} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

PRZEDZIAŁ UFNOŚCI DLA σ^2

$$\frac{(n-1)\hat{s}^2}{\chi^2_{\alpha/2;n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\hat{s}^2}{\chi^2_{1-\alpha/2;n-1}}$$