

Ćwiczenia 1

Funkcje jednej zmiennej. Funkcje elementarne

Dziedzina i miejsca zerowe • parzystość • złożenie i funkcja odwrotna • równania wykładnicze i logarytmiczne • zastosowania: pH, okres półtrwania, hałas, plon. Materiał teoretyczny: streszczenie wykładu 1.

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka • Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

Przypomnienie

Dziedzina: $\frac{h(x)}{g(x)} \Rightarrow g(x) \neq 0$; $\sqrt[n]{g(x)}$, n parzyste $\Rightarrow g(x) \geq 0$; $\log_a g(x) \Rightarrow g(x) > 0$. Parzysta:

$f(-x) = f(x)$, nieparzysta: $f(-x) = -f(x)$.

Funkcja odwrotna: z równania $y = f(x)$ wyznaczamy x . $\log_a x = b \iff x = a^b$; $a^u = a^w \iff u = w$;
 $\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$; $m(t) = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{t/T}$; $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$.

Zadania na ćwiczenia

Zadanie 1. Wyznacz dziedzinę funkcji:

a) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$

b) $f(x) = \frac{2x-1}{x^3-4x}$

c) $f(x) = \sqrt{x+3}$

d) $f(x) = \ln(x-2)$

e) $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$

f) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2-5x+6}$

g) ★ $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x^2-x}$

Zadanie 2. Wyznacz miejsca zerowe funkcji (pamiętaj o dziedzinie):

a) $f(x) = 3x - 6$

b) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

c) $f(x) = x^3 - 4x$

d) $f(x) = \ln(x-1)$

e) $f(x) = 2^x - 8$

f) ★ $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$

Zadanie 3. Zbadaj, czy funkcja jest parzysta, nieparzysta, czy żadna z nich:

a) $x^4 - 3x^2$

b) $x^3 - 5x$

c) $x^2 + x$

d) $\cos x + x^2$

Zadanie 4. Wyznacz $f \circ g$ oraz $g \circ f$:

a) $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$

b) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 + 2$

c) $f(x) = e^x$, $g(x) = -0,1x$

Zadanie 5. Wyznacz funkcję odwrotną:

a) $f(x) = 2x + 3$

b) $K = C + 273,15$ (stopnie Celsjusza $\rightarrow$ kelwiny)

c) $f(x) = x^3 + 1$

d) $f(x) = e^{x-2}$

Zadanie 6. Rozwiąż równania:

a) $2^{x+3} = 32$

b) $\log_3(x+2) = 2$

c) $e^{2x} = 5$

d) $\log x = -3$

e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{t/5} = \frac{1}{8}$

f) $\ln(x-1) + \ln(x+1) = \ln 3$

Zadanie 7. (pH) Odczyn roztworu: $\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$.

a) Oblicz pH wody, w której $[\text{H}^+] = 10^{-6} \text{ mol/l}$ oraz $[\text{H}^+] = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ mol/l}$.

b) pH jeziora spadło z 6,5 do 5,0. Ile razy wzrosło stężenie jonów wodorowych?

Zadanie 8. (okres półtrwania) Zanieczyszczenie w glebie ma okres półtrwania $T = 20$ dni, a jego początkowe stężenie wynosi 200 mg/kg.

a) Zapisz wzór $m(t)$ i oblicz stężenie po 60 dniach.

b) ★ Po ilu dniach stężenie spadnie do 10 mg/kg? (Wskazówka: zlogarytmuj równanie.)

Zadanie 9. (hałas) Jedna maszyna wytwarza hałas o poziomie 70 dB. Korzystając z $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$, oblicz poziom hałasu, gdy pracują jednocześnie a) dwie, b) dziesięć takich maszyn.

Zadanie 10. (plon) Plon y [dt/ha] zależy od dawki azotu x [kg/ha]: $y = 30 + 0,8x - 0,004x^2$. Wyznacz dawkę, przy której plon jest największy, oraz dawki, przy których plon wynosi 60 dt/ha.

Zadania do pracy samodzielnej

Zadanie S1. Wyznacz dziedzinę funkcji:

a) $\frac{x-3}{x^3-9x}$

b) $\ln(9-x^2)$

c) $\sqrt{x^2-5x+6}$

d) $\frac{\ln(x+1)}{x^2-1}$

e) $\sqrt{2-x}$

f) $\frac{1}{\sqrt{x-4}}$

Zadanie S2. Wyznacz funkcję odwrotną: a) $f(x) = 5 - 2x$; b) $f(x) = 10^x$; c) $F = 1,8C + 32$.

Zadanie S3. Rozwiąż równania: a) $9^x = 27$; b) $\log_2(x-1) = 3$; c) $\ln x = 2$; d) $3 \cdot 2^x = 48$.

Zadanie S4. (populacja bakterii) Liczba bakterii rozkładających zanieczyszczenie podwaja się co 3 godziny: $N(t) = 1000 \cdot 2^{t/3}$. Ile bakterii będzie po 12 h? Po jakim czasie liczba bakterii przekroczy milion?

Zadanie S5. (CO₂) Przyjmując model $C(t) = 424 + 2,4t$ [ppm] (t – lata od 2024 r.), oblicz, w którym roku stężenie CO₂ osiągnie 500 ppm oraz kiedy (według modelu) wynosiło 400 ppm.

Zadanie S6. (pH) Ile razy większe jest stężenie jonów H^+ w deszczu o pH = 4,2 niż w deszczu naturalnym o pH = 5,6?

 Sprawdź, co umiesz (ok. 20 minut)

Zadanie T1. Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-9}$.

Zadanie T2. Wyznacz miejsca zerowe funkcji $f(x) = x^3 - 9x$.

Zadanie T3. Wyznacz funkcję odwrotną do $f(x) = 3x - 6$.

Zadanie T4. Oblicz pH roztworu, w którym $[H^+] = 10^{-3,5}$ mol/l. Ile razy jest on kwaśniejszy od roztworu o $pH = 5,5$?

Zadanie T5. Okres półtrwania substancji wynosi 10 lat. Po ilu latach pozostanie $\frac{1}{16}$ jej początkowej masy?

Odpowiedzi

Zad. 1. a) $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$; b) $x(x-2)(x+2): \mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 2\}$; c) $\langle -3; \infty \rangle$; d) $(2; \infty)$; e) $\langle -2; 0 \rangle \cup (0; 2)$; f) $(0; 2) \cup (2; 3) \cup (3; \infty)$; g) $\langle -3; 0 \rangle \cup (0; 1) \cup (1; \infty)$.

Zad. 2. a) $x = 2$; b) $x \in \{2; 3\}$; c) $x(x-2)(x+2): x \in \{-2; 0; 2\}$; d) $x = 2$; e) $x = 3$; f) $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $x = -3$ ($x = 3 \notin D$).

Zad. 3. a) parzysta; b) nieparzysta; c) żadna; d) parzysta.

Zad. 4. a) $f \circ g = (x+1)^2$, $g \circ f = x^2 + 1$; b) $\sqrt{x^2 + 2}$, $x + 2$ ($x \geq 0$); c) $e^{-0,1x}$, $-0,1e^x$.

Zad. 5. a) $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$; b) $C = K - 273,15$; c) $\sqrt[3]{x-1}$; d) $\ln x + 2$, $x > 0$.

Zad. 6. a) $x = 2$; b) $x = 7$; c) $x = \frac{\ln 5}{2} \approx 0,80$; d) $x = 0,001$; e) $t = 15$; f) $x = 2$ ($x = -2$ nie należy do dziedziny).

Zad. 7. a) $\text{pH} = 6$; $\text{pH} = -\log(2,5 \cdot 10^{-5}) \approx 4,60$; b) $10^{6,5-5,0} = 10^{1,5} \approx 31,6$ razy.

Zad. 8. a) $m(t) = 200 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/20}$, $m(60) = 25 \text{ mg/kg}$; b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{t/20} = 0,05$, $t = 20 \cdot \frac{\ln 20}{\ln 2} \approx 86,4$ dnia.

Zad. 9. a) $70 + 10 \log 2 \approx 73 \text{ dB}$; b) $70 + 10 \log 10 = 80 \text{ dB}$.

Zad. 10. Wierzchołek: $x = 100 \text{ kg/ha}$ ($y = 70 \text{ dt/ha}$); $0,004x^2 - 0,8x + 30 = 0$, $x^2 - 200x + 7500 = 0$, $x \in \{50; 150\} \text{ kg/ha}$.

Zad. S1. a) $\mathbb{R} \setminus \{-3; 0; 3\}$; b) $(-3; 3)$; c) $(-\infty; 2) \cup \langle 3; \infty \rangle$; d) $(-1; 1) \cup (1; \infty)$; e) $(-\infty; 2)$; f) $(4; \infty)$.

Zad. S2. a) $\frac{5-x}{2}$; b) $\log x$; c) $C = \frac{F-32}{1,8}$.

Zad. S3. a) $x = \frac{3}{2}$; b) $x = 9$; c) $x = e^2$; d) $x = 4$.

Zad. S4. $N(12) = 16\,000$; $2^{t/3} > 1000$, $t > 3 \cdot \frac{\ln 1000}{\ln 2} \approx 29,9 \text{ h}$.

Zad. S5. $t = \frac{76}{2,4} \approx 31,7$, czyli ok. 2056 r.; $C = 400$ dla $t = -10$, czyli w 2014 r.

Zad. S6. $10^{1,4} \approx 25$ razy.

Sprawdź. T1: $\langle 1; 3 \rangle \cup (3; \infty)$; T2: $x(x-3)(x+3): x \in \{-3; 0; 3\}$; T3: $f^{-1}(x) = \frac{x+6}{3}$; T4: $\text{pH} = 3,5$, $10^2 = 100$ razy;

T5: $\frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$, po 40 latach.