MATEMATYKA • Technologia Drewna (studia niestacjonarne) • zestaw zadań

Ćwiczenia 1 • 24.10.2026 • 2 h

Funkcje elementarne. Granice i asymptoty

Dziedzina funkcji • funkcja odwrotna • funkcja kwadratowa • funkcja wykładnicza i logarytm • obliczanie granic • asymptoty. Materiał teoretyczny: streszczenie wykładów 1–2.

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka • Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

Przypomnienie

Dziedzina: $\sqrt{g} \Rightarrow g \geq 0$, $\frac{h}{g} \Rightarrow g \neq 0$, $\log g \Rightarrow g > 0$. Wierzchołek paraboli: $p = \frac{-b}{2a}$, $q = f(p)$.
$e^a = b \iff a = \ln b$.
$\left[\frac{0}{0}\right]$ – rozkład i skracanie; $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ – dzielenie przez najwyższą potęgę; asymptota pionowa: $\lim f = \pm\infty$; pozioma: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$.

Zadania na ćwiczenia

Zadanie 1. Wyznacz dziedzinę funkcji:

a) $f(x) = \sqrt{x-3}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-9}$ **c)** $f(x) = \ln(2x-4)$ **d)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$

Zadanie 2. (wilgotność) Masa deski w stanie absolutnie suchym wynosi $m_0 = 8$ kg. Wilgotność drewna $w = \frac{m-m_0}{m_0} \cdot 100\%$.

a) Zapisz masę deski m jako funkcję wilgotności w. Jaka jest masa deski przy $w = 15\%$?

b) Wyznacz funkcję odwrotną $w(m)$. Jaką wilgotność ma deska o masie 10 kg?

Zadanie 3. Dla funkcji $f(x) = x^2 - 6x + 5$ wyznacz miejsca zerowe, wierzchołek paraboli i przedziały monotoniczności. Naszkicuj wykres.

Zadanie 4. (zysk) Zysk zakładu stolarskiego [tys. zł] przy produkcji x szaf miesięcznie wynosi $Z(x) = -x^2 + 60x - 500$. Przy jakiej produkcji zysk jest największy? Dla jakich x produkcja jest opłacalna?

Zadanie 5. (suszenie) Wilgotność tarcicy w suszarni zmienia się według wzoru $u(t) = 10 + 40\,e^{-0{,}1t}$ [%], t w godzinach.

a) Jaka jest wilgotność początkowa i po 10 h?

b) Po ilu godzinach wilgotność spadnie do 15%?

c) Oblicz $\lim\limits_{t\to\infty} u(t)$ i zinterpretuj wynik.

Zadanie 6. Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$ **c)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-x}{5x^2+3}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+1}{x^2+2}$ **e)** $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{x-2}$, $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2}$ **f)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(5 + 20\,e^{-x}\right)$

Zadanie 7. Wyznacz asymptoty wykresu funkcji:

a) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x}$ **c)** ★ $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

Zadanie 8. (koszt) Koszt pomalowania 1 m^2 elementów w lakierni przy partii x m^2 wynosi $K(x) = 30 + \frac{1500}{x}$ [zł]. Oblicz $K(50)$ i $K(300)$. Wyznacz asymptoty wykresu i zinterpretuj asymptotę poziomą.

Zadania do pracy samodzielnej

Zadanie S1. Wyznacz dziedzinę: a) $f(x) = \sqrt{10-2x}$, b) $f(x) = \dfrac{3}{x^2-4x}$, c) $f(x) = \log(x^2-1)$.

Zadanie S2. Oblicz granice: a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$, b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+5}{2x^2-x}$, c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4}$.

Zadanie S3. Wyznacz asymptoty wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{3x}{x-1}$ i naszkicuj wykres.

Sprawdź, co umiesz (ok. 15 minut)

Zadanie T1. Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \dfrac{\ln(x+2)}{x-4}$.

Zadanie T2. Oblicz $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{x-4}$ oraz $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2+1}{x^2-3x}$.

Zadanie T3. Wyznacz asymptoty wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$.

Odpowiedzi

Zad. 1. a) $\langle 3;\infty)$; b) $\mathbb{R}\setminus\{-3;3\}$; c) $(2;\infty)$; d) $\langle -2;1)\cup(1;2\rangle$.

Zad. 2. a) $m(w)=8\left(1+\frac{w}{100}\right)$, $m(15)=9{,}2$ kg; b) $w(m)=\frac{m-8}{8}\cdot 100\%=12{,}5(m-8)$, $w(10)=25\%$.

Zad. 3. miejsca zerowe 1 i 5; wierzchołek $W(3,-4)$; maleje na $(-\infty;3)$, rośnie na $(3;\infty)$.

Zad. 4. $p=30$ szaf, $Z(30)=400$ tys. zł; $Z(x)>0$ dla $x\in(10;50)$.

Zad. 5. a) 50%; $u(10)=10+40\mathrm{e}^{-1}\approx 24{,}7\%$; b) $\mathrm{e}^{-0{,}1t}=\frac{1}{8}$, $t=10\ln 8\approx 20{,}8$ h; c) 10% – wilgotność równowagowa.

Zad. 6. a) 6; b) $\lim\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{2}{3}$; c) $\frac{2}{5}$; d) 0; e) $-\infty$, $+\infty$; f) 5.

Zad. 7. a) $x=-3$, $y=2$; b) $x=0$, $y=x$; c) $x=1$; ukośna: $a=1$, $b=\lim\frac{x}{x-1}=1$, $y=x+1$.

Zad. 8. $K(50)=60$ zł, $K(300)=35$ zł; asymptoty: $x=0$ (dla $x\to 0^{+}$) i $y=30$ – przy bardzo dużych partiach koszt 1 m^2 zbliża się do 30 zł (koszt zmienny).

Zad. S1. a) $(-\infty;5\rangle$; b) $\mathbb{R}\setminus\{0;4\}$; c) $(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$.

Zad. S2. a) $\lim(x-1)=2$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\lim\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}$.

Zad. S3. pionowa $x=1$, pozioma $y=3$.

Sprawdź. T1: $(-2;4)\cup(4;\infty)$; T2: 8; 4; T3: $x=1$, $y=1$.