

Ćwiczenia 1

Ciągi liczbowe i ich granice

Wyrazy ciągu • granica ciągu • ciąg geometryczny i ułamki okresowe • liczba e • zastosowania. Czas: 2 h. Materiał teoretyczny: streszczenie wykładu 1.

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka • Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

Przypomnienie

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ dla $|q| < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{a}{n})^n = e^a$; iloraz wielomianów – dzielimy licznik i mianownik przez najwyższą potęgę n z mianownika; różnica pierwiastków – mnożymy przez wyrażenie sprzężone; szereg geometryczny: $S = \frac{a_1}{1-q}$, $|q| < 1$.

Zadania na ćwiczenia

Zadanie 1. Wypisz cztery pierwsze wyrazy ciągu i oblicz jego granicę (jeśli istnieje):

a) $a_n = \frac{1-3n}{1+n}$

b) $a_n = \frac{6n-5}{5n+1}$

c) $a_n = \frac{4-n^2}{n^2+n}$

d) $a_n = \frac{5}{8-7n}$

e) $a_n = -5$

f) $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$

Zadanie 2. Oblicz granice ciągów:

a) $a_n = \frac{(2n-1)(3n+1)}{n^3+1}$

b) $a_n = \frac{5n^2-3n-5}{2n^2+1}$

c) $a_n = \frac{n^5-7n^3+5}{2n^3-10}$

d) $a_n = \frac{n^2-9n+1}{n^2-n}$

e) $a_n = \frac{3n^2+2n}{1-n^2}$

f) $a_n = \left(\frac{2n+1}{n-3}\right)^2$

Zadanie 3. Oblicz granice ciągów (wyłącz przed nawias potęgę o największej podstawie):

a) $a_n = \frac{4^{n-1}-5}{2^{2n}-7}$

b) $a_n = \frac{3 \cdot 2^{2n+2}-10}{5 \cdot 4^{n-1}+3}$

c) $a_n = \frac{2^{n+1}-3^{n+2}}{3^{n+2}}$

d) $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{2^{n+1}-1}{3^{n+1}-1}$

Zadanie 4. Oblicz granice ciągów (pomnóż i podziel przez wyrażenie sprzężone):

a) $\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$

b) $\sqrt{n^2+n}-n$

c) $n-\sqrt{n^2+5n}$

d) ★ $3n-\sqrt{9n^2+6n-15}$

Zadanie 5. Korzystając z twierdzenia o liczbie e , oblicz granice:

a) $\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$

b) $\left(1-\frac{3}{n}\right)^n$

c) $\left(\frac{n+5}{n}\right)^n$

d) $\left(1-\frac{4}{n}\right)^{-n+3}$

e) $\left(\frac{n^2+6}{n^2}\right)^{n^2}$

f) ★ $\left(\frac{n+1}{n-2}\right)^{2n}$

Zadanie 6. Zamień ułamek okresowy na ułamek zwykły: a) $0,4(90)$, b) $0,34(5)$, c) $2,71(244)$.

Zadanie 7. Czas (w godzinach), jakiego pracownik potrzebuje na wykonanie pewnego zadania w n -tym dniu pracy, wyraża się wzorem $a_n = \frac{4n+4}{3n-2}$.

- a) Ile godzin potrzebuje pracownik każdego dnia w pierwszym tygodniu pracy?
- b) Do jakiej wartości dąży czas wykonania zadania przy $n \rightarrow \infty$? Zinterpretuj wynik.

Zadanie 8. Pan X oszczędza: w pierwszym miesiącu wpłaca 100 zł, a w każdym kolejnym o 5% mniej niż w poprzednim.

- a) Ile wpłaci w 14. miesiącu oszczędzania?
- b) Ile zaoszczędziłby, gdyby oszczędzał w ten sposób „w nieskończoność”?

Zadania do pracy samodzielnej

Zadanie S1. Oblicz granice ciągów:

- | | | |
|-------------------------------------|--|--------------------------------------|
| a) $\frac{3n^2 - n + 4}{1 - 2n^2}$ | b) $\frac{n^3 + 2}{4n^2 - n}$ | c) $\frac{7 - n}{n^4 + 1}$ |
| d) $\frac{5^{n+1} + 2^n}{5^n - 3}$ | e) $\frac{2^{2n} + 3}{4^{n+1} - 1}$ | f) $\sqrt{n^2 + 4n} - n$ |
| g) $\sqrt{n+5} - \sqrt{n+1}$ | h) $\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$ | i) $\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n$ |
| j) $\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^n$ | k) ★ $\left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^{3n}$ | l) $\sqrt{4n^2 + 3n} - 2n$ |

Zadanie S2. Zamień na ułamek zwykły: a) $0,(27)$, b) $1,6(36)$, c) $0,1(235)$.

Zadanie S3. (zastosowanie) Moc modułu fotowoltaicznego w pierwszym roku pracy wynosi 400 W, a w każdym kolejnym roku jest o 0,5% mniejsza niż w poprzednim (degradacja ogniwa).

- a) Zapisz wzór na moc P_n w n -tym roku pracy. Jaki to ciąg?
- b) Oblicz moc modułu w 25. roku pracy.
- c) ★ W którym roku pracy moc po raz pierwszy spadnie poniżej 360 W?

Zadanie S4. Wykaż, że ciąg $a_n = \frac{n}{n+1}$ jest rosnący i ograniczony. Co wynika z tego dla jego zbieżności?

Sprawdź, co umiesz (ok. 20 minut)

Zadanie T1. Oblicz: a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 - 2n + 1}{2n^3 + 5n^2}$, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 3^n}{3^{n+1} + 1}$.

Zadanie T2. Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 6n} - n)$.

Zadanie T3. Oblicz: a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^{2n}$, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n+1}\right)^n$.

Zadanie T4. Zamień ułamek 0,2(30) na ułamek zwykły.

 Odpowiedzi

Zad. 1. a) $-1, -\frac{5}{3}, -2, -\frac{11}{5}$; $g = -3$; b) $\frac{1}{6}, \frac{7}{11}, \frac{13}{16}, \frac{19}{21}$; $g = \frac{6}{5}$; c) $\frac{3}{2}, 0, -\frac{5}{12}, -\frac{3}{5}$; $g = -1$; d) $5, -\frac{5}{6}, -\frac{5}{13}, -\frac{1}{4}$; $g = 0$; e) -5 ; f) $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}$ – granica nie istnieje (ciąg rozbieżny).

Zad. 2. a) 0; b) $\frac{5}{2}$; c) ∞ ; d) 1; e) -3 ; f) 4.

Zad. 3. a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{48}{5}$; c) -1 ; d) $\frac{2}{3}$.

Zad. 4. a) 0; b) $\frac{1}{2}$; c) $-\frac{5}{2}$; d) -1 .

Zad. 5. a) e^2 ; b) e^{-3} ; c) e^5 ; d) e^4 ; e) e^6 ; f) e^6 .

Zad. 6. a) $\frac{27}{55}$; b) $\frac{311}{900}$; c) $\frac{270973}{99900}$.

Zad. 7. a) 8; 3; $\frac{16}{7}$; 2; $\frac{24}{13}$; $\frac{7}{4}$; $\frac{32}{19}$ h; b) $\frac{4}{3}$ h – po długim czasie pracownik wykonuje zadanie w ok. 1 h 20 min.

Zad. 8. a) $a_{14} = 100 \cdot 0,95^{13} \approx 51,33$ zł; b) $S = \frac{100}{1-0,95} = 2000$ zł.

Zad. S1. a) $-\frac{3}{2}$; b) ∞ ; c) 0; d) 5; e) $\frac{1}{4}$; f) 2; g) 0; h) e^3 ; i) $e^{-1/2}$; j) e^{-3} ; k) e^3 ; l) $\frac{3}{4}$.

Zad. S2. a) $\frac{3}{11}$; b) $\frac{18}{11}$; c) $\frac{617}{4995}$.

Zad. S3. a) $P_n = 400 \cdot 0,995^{n-1}$ – ciąg geometryczny, $q = 0,995$; b) $P_{25} \approx 354,7$ W; c) w 23. roku ($P_{22} \approx 360,0$ W, $P_{23} \approx 358,2$ W).

Zad. S4. $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$; $\frac{1}{2} \leq a_n < 1$; ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny ($g = 1$).

Sprawdź. T1: a) 2, b) $-\frac{1}{3}$; T2: 3; T3: a) e^{10} , b) e^3 ; T4: $\frac{38}{165}$.