

Ćwiczenia 2

Ciągi liczbowe. Granica i ciągłość funkcji, asymptoty

Wyrazy i granice ciągów • liczba e • ciąg geometryczny w zastosowaniach • granice funkcji • ciągłość • asymptoty. Materiał teoretyczny: streszczenie wykładu 2.

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka • Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

Przypomnienie

$\frac{\infty}{\infty}$: dzielimy przez najwyższą potęgę; $\frac{0}{0}$: rozkładamy na czynniki i skracamy; $\frac{\text{liczba}}{0}$: granice jednostronne. $\lim q^n = 0$ dla $|q| < 1$; $\lim (1 + \frac{a}{n})^n = e^a$; ciąg geometryczny: $a_n = a_1 q^{n-1}$, $S = \frac{a_1}{1-q}$ ($|q| < 1$).

Asymptoty: pionowa – $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = \pm\infty$; pozioma – $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = c$; ukośna – $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax]$.

Zadania na ćwiczenia

Zadanie 1. Wypisz cztery pierwsze wyrazy ciągu i oblicz jego granicę (jeśli istnieje):

a) $a_n = \frac{1-3n}{1+n}$ b) $a_n = \frac{6n-5}{5n+1}$ c) $a_n = \frac{5}{8-7n}$ d) $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$

Zadanie 2. Oblicz granice ciągów:

a) $\frac{5n^2-3n-5}{2n^2+1}$ b) $\frac{(2n-1)(3n+1)}{n^3+1}$ c) $\frac{3n^2+2n}{1-n^2}$
d) $\frac{n^3+2}{4n^2-n}$ e) $\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$ f) $\left(1-\frac{3}{n}\right)^n$

Zadanie 3. (emisja CO₂) Zakład emituje w pierwszym roku 50 tys. ton CO₂, a w każdym kolejnym roku o 4% mniej niż w poprzednim.

- a) Zapisz wzór na emisję a_n w n -tym roku. Jaki to ciąg? Oblicz emisję w 11. roku.
b) Ile CO₂ wyemitowałby zakład łącznie, gdyby redukował emisję w ten sposób „w nieskończoność”?

Zadanie 4. (jezioro) Stężenie azotanów w jeziorze w kolejnych latach po modernizacji oczyszczalni opisuje ciąg $c_n = 5 + 40 \cdot 0,7^n$ [mg/l], $n = 0, 1, 2, \dots$. Oblicz c_0, c_1, c_2, c_3 oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$. Zinterpretuj wynik.

Zadanie 5. Oblicz granice funkcji w punkcie (jeśli trzeba – jednostronne):

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+4}{x+2}$ b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-4x+3}{2x-6}$ c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-1}{x^2-1}$
d) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-9}{x^2+x-6}$ e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x}$ f) ★ $\lim_{x \rightarrow 25} \frac{\sqrt{x}-5}{x-25}$

Zadanie 6. Oblicz granice funkcji w nieskończoności:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 2x^2 - x - 1}{5x^3 + x - 4}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2}{x^2 + 3x + 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 5x + 6}{x - 7}$

d) $\lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{12c}{3 + c}$

Zadanie 7. Zbadaj ciągłość funkcji $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x - 5}, & x \neq 5 \\ 5, & x = 5 \end{cases}$ w punkcie $x = 5$. Jak zmienić wartość $f(5)$, aby funkcja była ciągła?

Zadanie 8. Wyznacz asymptoty funkcji:

a) $f(x) = \frac{x}{1 - x}$

b) $f(x) = \frac{2x + 1}{x^2}$

c) ★ $f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x + 4}$

Zadanie 9. (stężenie) Stężenie substancji w zbiorniku zasilanym roztworem opisuje funkcja $c(t) = \frac{8t}{t + 2}$ [g/l], $t \geq 0$ – czas w godzinach. Oblicz $c(0)$, $c(2)$, $c(18)$ oraz $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t)$. Jaką asymptotę ma wykres? Co oznacza ona w praktyce?

🏠 Zadania do pracy samodzielnej

Zadanie S1. Oblicz granice ciągów:

a) $\frac{3n^2 - n + 4}{1 - 2n^2}$

b) $\frac{7 - n}{n^4 + 1}$

c) $\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$

d) $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$

Zadanie S2. Oblicz granice funkcji:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x}{5 - 3x^2}$

Zadanie S3. Wyznacz asymptoty funkcji: a) $f(x) = \frac{x + 2}{1 - x}$, b) $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x - 2}$.

Zadanie S4. Dobierz parametr a tak, aby funkcja $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ a, & x = 2 \end{cases}$ była ciągła.

Zadanie S5. (zalesianie) W pierwszym roku programu posadzono 5000 drzew, a w każdym kolejnym roku o 10% mniej niż w poprzednim. Ile drzew posadzono w 5. roku? Ile drzew zostałyby posadzonych łącznie, gdyby program trwał „w nieskończoność”?

📝 Sprawdź, co umiesz (ok. 20 minut)

Zadanie T1. Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 - 2n + 1}{2n^3 + 5n^2}$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^{2n}$.

Zadanie T2. Oblicz $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3}$.

Zadanie T3. Wyznacz wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$.

Zadanie T4. Stężenie zanieczyszczenia w kolejnych dobach wynosi $c_n = 3 + 12 \cdot 0,5^n$ [mg/l]. Do jakiej wartości dąży stężenie?

 Odpowiedzi

Zad. 1. a) $-1, -\frac{5}{3}, -2, -\frac{11}{5}$; $g = -3$; b) $\frac{1}{6}, \frac{7}{11}, \frac{13}{16}, \frac{19}{21}$; $g = \frac{6}{5}$; c) $5, -\frac{5}{6}, -\frac{5}{13}, -\frac{1}{4}$; $g = 0$; d) $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}$ – rozbieżny.

Zad. 2. a) $\frac{5}{2}$; b) 0; c) -3 ; d) ∞ ; e) e^2 ; f) e^{-3} .

Zad. 3. a) $a_n = 50 \cdot 0,96^{n-1}$ – ciąg geometryczny, $q = 0,96$; $a_{11} = 50 \cdot 0,96^{10} \approx 33,2$ tys. t; b) $S = \frac{50}{1-0,96} = 1250$ tys. t.

Zad. 4. $c_0 = 45, c_1 = 33, c_2 = 24,6, c_3 = 18,72$ mg/l; $\lim c_n = 5$ – stężenie stabilizuje się na poziomie 5 mg/l.

Zad. 5. a) 2; b) 1; c) 2; d) $\frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(x-2)}, \frac{6}{5}$; e) $\lim_{x \rightarrow 1^-} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} = -\infty$ – granica nie istnieje; f) $\frac{\sqrt{x}-5}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)}, \frac{1}{10}$.

Zad. 6. a) $\frac{3}{5}$; b) 0; c) $-\infty$; d) 12.

Zad. 7. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-25}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} (x+5) = 10 \neq 5$ – funkcja nieciągła; należy przyjąć $f(5) = 10$.

Zad. 8. a) pionowa $x = 1$, pozioma $y = -1$; b) pionowa $x = 0$, pozioma $y = 0$; c) pionowa $x = -2$, ukośna $y = \frac{1}{2}x - 1$.

Zad. 9. $c(0) = 0, c(2) = 4, c(18) = 7,2$ g/l; $\lim c(t) = 8$ – asymptota pozioma $c = 8$: stężenie zbliża się do 8 g/l, ale go nie przekracza.

Zad. S1. a) $-\frac{3}{2}$; b) 0; c) e^3 ; d) $e^{1/2} = \sqrt{e}$.

Zad. S2. a) 2; b) 12; c) 4; d) $-\frac{2}{3}$.

Zad. S3. a) pionowa $x = 1$, pozioma $y = -1$; b) pionowa $x = 2$, ukośna $y = x + 4$.

Zad. S4. $a = 4$.

Zad. S5. $5000 \cdot 0,9^4 \approx 3281$ drzew; $S = \frac{5000}{1-0,9} = 50\,000$ drzew.

Sprawdź. T1: 2; e^{10} ; T2: $\frac{3}{2}$; T3: pionowa $x = 1$, ukośna $y = x + 1$; T4: 3 mg/l.