MATEMATYKA • Technologia Drewna (studia niestacjonarne) • zestaw zadań

Ćwiczenia 2 • 7.11.2026 • 3 h

Pochodna funkcji

Pochodna z definicji • reguły różniczkowania • pochodna funkcji złożonej • równanie stycznej • pochodna jako tempo zmian • druga pochodna. Materiał teoretyczny: streszczenie wykładów 3–4.

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka • Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

Przypomnienie

$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$; $(c)' = 0$, $(x^n)' = nx^{n-1}$, $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
$(f \pm g)' = f' \pm g'$, $(af)' = af'$, $(fg)' = f'g + fg'$, $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, $\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$,
$\left(\mathrm{e}^{kx}\right)' = k\,\mathrm{e}^{kx}$;
styczna: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$; $f'(t_0)$ – chwilowe tempo zmian; $\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$, $\frac{1}{x^k} = x^{-k}$.

Zadania na ćwiczenia

Zadanie 1. Korzystając z definicji, wyznacz pochodną funkcji w punkcie x_0:

a) $f(x) = 3x^2$, $x_0 = 1$ **b)** $f(x) = x^2 + 4x$, $x_0 = 2$

Zadanie 2. Oblicz pochodne funkcji:

a) $y = 4x^3 - 5x^2 + 2x - 7$ **b)** $y = x^6 - 3x^4 + 1$ **c)** $y = \frac{5}{x}$ **d)** $y = \frac{3}{x^2}$

e) $y = 6\sqrt{x}$ **f)** $y = \sqrt{x^3}$ **g)** $y = 2x^2 - 4\sqrt{x} + \frac{3}{x}$ **h)** $y = \frac{x^2+1}{x}$

Zadanie 3. Oblicz pochodne, korzystając z reguł dla iloczynu i ilorazu:

a) $y = (x^2+1)(3x-2)$ **b)** $y = x^2\mathrm{e}^x$ **c)** $y = x^3 \ln x$

d) $y = \frac{2x+1}{x-3}$ **e)** $y = \frac{x^2}{x^2+1}$ **f)** ★ $y = \frac{\mathrm{e}^x}{x+1}$

Zadanie 4. Oblicz pochodne funkcji złożonych:

a) $y = (2x+3)^5$ **b)** $y = (x^2 - 4x)^3$ **c)** $y = \sqrt{4x+1}$ **d)** $y = \mathrm{e}^{3x}$

e) $y = \mathrm{e}^{-0{,}1t}$ **f)** $y = \ln(2x+5)$ **g)** $y = \ln(x^2+1)$ **h)** ★ $y = x\,\mathrm{e}^{-2x}$

Zadanie 5. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji w punkcie o odciętej x_0:

a) $y = x^2 - 4x + 5$, $x_0 = 3$ **b)** $y = x^3$, $x_0 = 2$

c) $y = \mathrm{e}^x$, $x_0 = 0$ **d)** $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$

Zadanie 6. (suszenie) Wilgotność tarcicy w suszarni opisuje funkcja $u(t) = 10 + 40\,e^{-0{,}1t}$ [%], t w godzinach (model przybliżony, por. ćwiczenia 1).

a) Wyznacz $u'(t)$. Oblicz $u'(0)$ i $u'(10)$, podaj jednostki i zinterpretuj wyniki.

b) Wyznacz równanie stycznej do wykresu $u(t)$ w punkcie $t_0 = 0$. Po ilu godzinach wilgotność osiągnęłaby 10%, gdyby suszenie przebiegało cały czas w tempie początkowym?

c) Oblicz $u''(t)$. Co znak drugiej pochodnej mówi o przebiegu suszenia?

Zadanie 7. (przyrost grubości) Pierśnicę sosny opisuje model przybliżony $d(t) = 45\bigl(1 - e^{-0{,}02t}\bigr)$ [cm], t – wiek drzewa w latach. Wyznacz $d'(t)$ i oblicz tempo przyrostu grubości w wieku 20 i 50 lat. Czy drzewo przyrasta na grubość szybciej, gdy jest młode, czy gdy jest starsze?

Zadanie 8. (koszt krańcowy) Miesięczny koszt produkcji x szaf w zakładzie stolarskim wynosi $K(x) = 4000 + 300x + 2x^2$ [zł] (wartości przykładowe).

a) Wyznacz koszt krańcowy $K'(x)$ i oblicz $K'(20)$. Zinterpretuj wynik.

b) Oblicz $K(21) - K(20)$ i porównaj z $K'(20)$.

Zadanie 9. (objętość kłody) Objętość kłody o długości 4 m (traktowanej jak walec) wynosi $V(d) = \pi d^2$ [m³], gdzie d – średnica w metrach (blok I). Oblicz $V'(0{,}4)$ i podaj jego jednostkę. Korzystając z pochodnej, oszacuj, o ile wzrośnie objętość kłody, gdy jej średnica zwiększy się z 40 cm do 41 cm. Porównaj z wartością dokładną $V(0{,}41) - V(0{,}4)$.

Zadanie 10. Wyznacz drugą pochodną funkcji:

a) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 5x$ **b)** $f(x) = e^{-2x}$ **c)** $f(x) = \ln x$ **d)** ★ $f(x) = x\,e^x$

Zadania do pracy samodzielnej

Zadanie S1. Oblicz pochodne funkcji:

a) $y = 2 + 4x - \frac{1}{3}x^3$ **b)** $y = \dfrac{x+2}{x-1}$ **c)** $y = (3x-1)^4$

d) $y = x^2 \ln x$ **e)** $y = e^{-x^2}$ **f)** $y = \sqrt{x^2+9}$

Zadanie S2. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $y = x^3 - 2x$ w punkcie $x_0 = 1$.

Zadanie S3. (parzenie drewna) Temperatura wnętrza elementu bukowego w komorze parzenia zmienia się według wzoru $T(t) = 90 - 70\,e^{-0{,}05t}$ [°C], t w minutach (model przybliżony). Oblicz $T'(0)$ i $T'(20)$. Jak zmienia się tempo nagrzewania w czasie?

Sprawdź, co umiesz (ok. 20 minut)

Zadanie T1. Oblicz pochodną funkcji $y = 4x^3 - 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$.

Zadanie T2. Oblicz pochodne funkcji: a) $y = x^2 \mathrm{e}^{-x}$, b) $y = \ln(3x^2 + 1)$.

Zadanie T3. Wilgotność tarcicy w suszarni: $u(t) = 12 + 48\,\mathrm{e}^{-0{,}05t}$ [%], t w godzinach. Oblicz $u'(t)$ i $u'(0)$ oraz wyznacz równanie stycznej do wykresu u w punkcie $t_0 = 0$.

Odpowiedzi

Zad. 1. a) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3(1+\Delta x)^2-3}{\Delta x} = 6+3\Delta x \to 6$, $f'(1)=6$; b) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 8+\Delta x \to 8$, $f'(2)=8$.

Zad. 2. a) $12x^2-10x+2$; b) $6x^5-12x^3$; c) $-\frac{5}{x^2}$; d) $-\frac{6}{x^3}$; e) $\frac{3}{\sqrt{x}}$; f) $\frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$; g) $4x-\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{3}{x^2}$; h) $y = x+x^{-1}$, $y' = 1-\frac{1}{x^2}$.

Zad. 3. a) $2x(3x-2)+3(x^2+1) = 9x^2-4x+3$; b) $e^x(x^2+2x)$; c) $3x^2\ln x + x^2 = x^2(3\ln x+1)$; d) $\frac{2(x-3)-(2x+1)}{(x-3)^2} = \frac{-7}{(x-3)^2}$; e) $\frac{2x}{(x^2+1)^2}$; f) $\frac{e^x(x+1)-e^x}{(x+1)^2} = \frac{x\,e^x}{(x+1)^2}$.

Zad. 4. a) $10(2x+3)^4$; b) $3(x^2-4x)^2(2x-4)$; c) $\frac{2}{\sqrt{4x+1}}$; d) $3e^{3x}$; e) $-0{,}1e^{-0{,}1t}$; f) $\frac{2}{2x+5}$; g) $\frac{2x}{x^2+1}$; h) $e^{-2x}(1-2x)$.

Zad. 5. a) $f(3)=2$, $f'(3)=2$: $y=2x-4$; b) $f(2)=8$, $f'(2)=12$: $y=12x-16$; c) $y=x+1$; d) $f(4)=2$, $f'(4)=\frac{1}{4}$: $y=\frac{1}{4}x+1$.

Zad. 6. a) $u'(t) = -4e^{-0{,}1t}$ [%/h]; $u'(0) = -4$ %/h – na początku wilgotność spada o 4 pkt proc. na godzinę; $u'(10) = -4e^{-1} \approx -1{,}47$ %/h – po 10 h suszenie jest wolniejsze; b) $u(0)=50$: $y = 50-4t$; $50-4t=10$ dla $t=10$ h; c) $u''(t) = 0{,}4e^{-0{,}1t} > 0$ – tempo u' rośnie w stronę 0, suszenie zwalnia (wykres wypukły).

Zad. 7. $d'(t) = 0{,}9e^{-0{,}02t}$ [cm/rok]; $d'(20) = 0{,}9e^{-0{,}4} \approx 0{,}60$ cm/rok, $d'(50) = 0{,}9e^{-1} \approx 0{,}33$ cm/rok – młode drzewo przyrasta szybciej.

Zad. 8. a) $K'(x) = 300+4x$, $K'(20) = 380$ zł/szafę – przy produkcji 20 szaf wykonanie kolejnej kosztuje ok. 380 zł; b) $K(21)-K(20) = 382$ zł $\approx K'(20)$.

Zad. 9. $V'(d) = 2\pi d$, $V'(0{,}4) = 0{,}8\pi \approx 2{,}51$ m^3/m; $\Delta V \approx V'(0{,}4)\cdot 0{,}01 \approx 0{,}0251$ m^3; dokładnie $\pi(0{,}41^2-0{,}4^2) = 0{,}0081\pi \approx 0{,}0254$ m^3.

Zad. 10. a) $f' = 4x^3-6x^2+5$, $f'' = 12x^2-12x$; b) $4e^{-2x}$; c) $-\frac{1}{x^2}$; d) $f' = e^x(x+1)$, $f'' = e^x(x+2)$.

Zad. S1. a) $4-x^2$; b) $\frac{-3}{(x-1)^2}$; c) $12(3x-1)^3$; d) $2x\ln x + x$; e) $-2xe^{-x^2}$; f) $\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$.

Zad. S2. $f(1)=-1$, $f'(1)=1$: $y=x-2$.

Zad. S3. $T'(t) = 3{,}5e^{-0{,}05t}$ [°C/min]; $T'(0) = 3{,}5$ °C/min, $T'(20) = 3{,}5e^{-1} \approx 1{,}29$ °C/min – nagrzewanie z czasem zwalnia.

Sprawdź. T1: $12x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$; T2: a) $e^{-x}(2x-x^2)$, b) $\frac{6x}{3x^2+1}$; T3: $u'(t) = -2{,}4e^{-0{,}05t}$, $u'(0) = -2{,}4$ %/h, styczna: $y = 60-2{,}4t$.