

Ćwiczenia 2

Funkcje jednej zmiennej – dziedzina i miejsca zerowe

Dziedzina funkcji wymiernych, logarytmicznych i z pierwiastkami • rozkład wielomianu na czynniki • miejsca zerowe. Czas: 2 h. Materiał teoretyczny: streszczenie wykładu 2–3.

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka • Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

Przypomnienie

$$\frac{h(x)}{g(x)} \Rightarrow g(x) \neq 0$$

$$\ln g(x), \log_a g(x) \Rightarrow g(x) > 0$$

$$\sqrt[n]{g(x)}, n \text{ parzyste} \Rightarrow g(x) \geq 0$$

$$\sqrt[n]{g(x)}, n \text{ nieparzyste} \Rightarrow \text{brak warunku}$$

Wielomian stopnia 3 bez wyrazu wolnego: $ax^3 + bx^2 + cx = x(ax^2 + bx + c)$ – jednym pierwiastkiem jest $x = 0$, pozostałe wyznaczamy z Δ .

Miejsce zerowe ułamka: licznik = 0 i x należy do dziedziny.

Zadania na ćwiczenia

Zadanie 1. Wyznacz dziedzinę funkcji wymiernej (rozłóż mianownik na czynniki):

a) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$

b) $f(x) = \frac{2x-1}{x^3-4x}$

c) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^3+x^2-6x}$

d) $f(x) = \frac{3}{x^3-2x^2+x}$

e) $f(x) = \frac{x-5}{x^3-3x^2}$

f) $f(x) = \frac{x^2}{x^3+5x}$

Zadanie 2. Wyznacz dziedzinę funkcji z logarytmem w liczniku:

a) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2-5x+6}$

b) $f(x) = \frac{\ln x}{x^3-x}$

c) $f(x) = \frac{\ln x}{x^3-3x^2}$

d) $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{x^3-4x}$

Zadanie 3. Wyznacz dziedzinę funkcji z pierwiastkiem stopnia parzystego:

a) $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x^2-x}$

b) $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^3+x}$

c) $f(x) = \frac{\sqrt[4]{x-1}}{x^2-4}$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^3-x^2-2x}$

e) $f(x) = \sqrt{x^2-5x+6}$

f) ★ $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$

Zadanie 4. Wyznacz dziedzinę funkcji z pierwiastkiem stopnia nieparzystego. Porównaj z zadaniem 3.

a) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x-5}}{x^3-9x}$

b) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+2x-3}$

c) $f(x) = \frac{\sqrt[5]{x+4}}{x^3+2x^2}$

Zadanie 5. Wyznacz dziedzinę funkcji (kilka warunków jednocześnie):

a) $f(x) = \frac{\ln x + \sqrt{x}}{x^2 - 4x}$

b) $f(x) = \ln(x^2 - 4)$

c) ★ $f(x) = \frac{\sqrt{x+2} + \ln(5-x)}{x^3 - x}$

Zadanie 6. Wyznacz dziedzinę i miejsca zerowe funkcji:

a) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^3 + x}$

b) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2 - 5x + 6}$

c) $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x^2 - x}$

d) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x-5}}{x^3 - 9x}$

e) ★ $f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x - 2}$

f) $f(x) = \frac{x^2 - x}{\sqrt{x+2}}$

🏠 Zadania do pracy samodzielnej

Zadanie S1. Wyznacz dziedzinę funkcji:

a) $\frac{x-3}{x^3-9x}$

b) $\frac{x^2}{x^3+2x^2-3x}$

c) $\frac{\ln x}{x^2-1}$

d) $\frac{\ln(x+1)}{x^3-x^2}$

e) $\frac{\sqrt{2-x}}{x^3-x}$

f) $\frac{\sqrt{x+1}}{x^2-3x+2}$

g) $\frac{\sqrt[3]{x+2}}{x^3-x}$

h) $\frac{\sqrt[5]{x^2-1}}{x^2-x-6}$

i) $\ln(9-x^2)$

j) $\sqrt{x^2+x-12}$

k) $\frac{\sqrt{x} + \ln(x+3)}{x^2-1}$

l) $\frac{1}{\sqrt{x^2-4x}}$

Zadanie S2. Wyznacz miejsca zerowe funkcji z zadania S1, podpunkty a), c), f), g).

Zadanie S3. Podaj przykład funkcji, której dziedziną jest zbiór: a) $\mathbb{R} \setminus \{0; 4\}$, b) $(0; \infty) \setminus \{1\}$, c) $\langle -2; 2 \rangle$.

📌 Sprawdź, co umiesz (ok. 20 minut)

Zadanie T1. Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{x+5}{x^3-x^2-6x}$.

Zadanie T2. Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{\ln x}{x^2-7x+10}$ oraz jej miejsce zerowe.

Zadanie T3. Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}}{x^3-4x}$.

Zadanie T4. Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x^2-4x+3}$. Czy $x=1$ jest miejscem zerowym tej funkcji?

Odpowiedzi

Zad. 1. a) $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$; b) $x(x-2)(x+2): \mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 2\}$; c) $x(x+3)(x-2): \mathbb{R} \setminus \{-3; 0; 2\}$; d) $x(x-1)^2: \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$; e) $x^2(x-3): \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$; f) $x(x^2+5): \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Zad. 2. a) $(0; 2) \cup (2; 3) \cup (3; \infty)$; b) $(0; 1) \cup (1; \infty)$; c) $(0; 3) \cup (3; \infty)$; d) $(1; 2) \cup (2; \infty)$.

Zad. 3. a) $\langle -3; 0 \rangle \cup (0; 1) \cup (1; \infty)$; b) $\langle -2; 0 \rangle \cup (0; 2)$; c) $\langle 1; 2 \rangle \cup (2; \infty)$; d) $(0; 2) \cup (2; \infty)$; e) $(-\infty; 2) \cup (3; \infty)$; f) $(-\infty; -2) \cup (1; \infty)$.

Zad. 4. a) $\mathbb{R} \setminus \{-3; 0; 3\}$; b) $\mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$; c) $x^2(x+2): \mathbb{R} \setminus \{-2; 0\}$ – pierwiastek stopnia nieparzystego nie ogranicza dziedziny.

Zad. 5. a) $(0; 4) \cup (4; \infty)$; b) $(-\infty; -2) \cup (2; \infty)$; c) $\langle -2; -1 \rangle \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 5)$.

Zad. 6. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, x_0 \in \{-2; 2\}$; b) $x_0 = 1$; c) $x_0 = -3$; d) $x_0 = 5$; e) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}, x_0 \in \{-2; 0\}$ ($x = 2 \notin D!$); f) $D = (-2; \infty), x_0 \in \{0; 1\}$.

Zad. S1. a) $\mathbb{R} \setminus \{-3; 0; 3\}$; b) $\mathbb{R} \setminus \{-3; 0; 1\}$; c) $(0; 1) \cup (1; \infty)$; d) $(-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; \infty)$; e) $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2)$; f) $\langle -1; 1 \rangle \cup (1; 2) \cup (2; \infty)$; g) $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$; h) $\mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$; i) $(-3; 3)$; j) $(-\infty; -4) \cup (3; \infty)$; k) $\langle 0; 1 \rangle \cup (1; \infty)$; l) $(-\infty; 0) \cup (4; \infty)$.

Zad. S2. a) brak ($x = 3 \notin D$); c) brak ($x = 1 \notin D$); f) $x = -1$; g) $x = -2$.

Zad. S3. np. a) $\frac{1}{x^2-4x}$; b) $\frac{\ln x}{x-1}$; c) $\sqrt{4-x^2}$.

Sprawdź. T1: $x(x-3)(x+2): \mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 3\}$; T2: $(0; 2) \cup (2; 5) \cup (5; \infty), x_0 = 1$; T3: $\langle -4; -2 \rangle \cup (-2; 0) \cup (0; 2) \cup (2; \infty)$; T4: $\mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$; nie – $x = 1 \notin D$.