

Ćwiczenia 3

Pochodna funkcji

Pochodna z definicji • reguły różniczkowania • pochodna funkcji złożonej • równanie stycznej • pochodna jako tempo zmian • różniczka. Materiał teoretyczny: streszczenie wykładu 3.

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka • Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

Przypomnienie

$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$; $(x^n)' = nx^{n-1}$, $(e^x)' = e^x$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$;

$(fg)' = f'g + fg'$, $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$; styczna: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$;
 $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$.

Pierwiastki zapisujemy jako potęgi: $\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$, $\frac{1}{x^k} = x^{-k}$.

Zadania na ćwiczenia

Zadanie 1. Korzystając z definicji, wyznacz pochodną funkcji w punkcie:

a) $f(x) = 4x^2 + 7x$, $x_0 = -1$

b) $f(x) = x - \frac{1}{x}$, $x_0 = 1$

Zadanie 2. Oblicz pochodne funkcji:

a) $y = 4x^2 - 8x + 9600$

b) $y = 10x^4 - 4x^{-2}$

c) $y = \frac{4}{x^3}$

d) $y = \sqrt{x} + 2x^2$

e) $y = 8\sqrt[5]{x^7}$

f) $y = \frac{5x}{\sqrt[3]{x}}$

Zadanie 3. Oblicz pochodne, korzystając z reguł dla iloczynu i ilorazu:

a) $y = (2x + 8)(4 + x^4)$

b) $y = x \ln x$

c) $y = e^x \ln x$

d) $y = \frac{x^2}{x+1}$

e) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

f) ★ $y = \frac{4x - 9}{6x^2 - x + 10}$

Zadanie 4. Oblicz pochodne funkcji złożonych:

a) $y = (3x^2 + 1)^5$

b) $y = e^{-x^2}$

c) $y = \ln(x^2 + 1)$

d) $y = \sqrt{1 - x^2}$

e) $y = e^{-0,1t}$

f) $y = \sin \frac{\pi t}{6}$

g) ★ $y = t e^{-2t}$

Zadanie 5. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji w punkcie o odciętej x_0 :

a) $y = 2x^2 + 1$, $x_0 = 1$

b) $y = e^x$, $x_0 = 0$

c) $y = \ln x$, $x_0 = 1$

d) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$

Zadanie 6. (populacja) Liczebność populacji chronionego gatunku ptaków opisuje funkcja $N(t) = 500 e^{0,1t}$, t – lata. Wyznacz $N'(t)$ i oblicz tempo wzrostu populacji na początku obserwacji oraz po 10 latach. Wykaż, że $N'(t) = 0,1 N(t)$.

Zadanie 7. (stężenie) Stężenie leku (lub zanieczyszczenia) w organizmie ryby po ekspozycji opisuje funkcja $c(t) = \frac{6t}{t^2 + 4}$ [mg/kg], t – doby.

- a) Oblicz $c'(t)$ oraz $c'(1)$ i $c'(3)$. Zinterpretuj znak pochodnej.
- b) Dla jakiego t pochodna jest równa zero? Co to oznacza?

Zadanie 8. (różniczka) Korzystając z różniczki, oszacuj: a) $\sqrt{4,04}$; b) przyrost pola plamy ropy w kształcie koła, gdy jej promień wzrośnie z 50 m do 51 m. Porównaj z wartością dokładną.

Zadania do pracy samodzielnej

Zadanie S1. Oblicz pochodne funkcji:

- | | | | |
|----------------------------------|----------------------|-----------------------------|-----------------------|
| a) $y = 2 + 4x - \frac{1}{3}x^3$ | b) $y = 2x^3 \sin x$ | c) $y = e^{3x}$ | d) $y = \ln(5x)$ |
| e) $y = (2x - 1)^4$ | f) $y = x e^{-x}$ | g) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ | h) $y = \cos(3x + 1)$ |

Zadanie S2. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $y = x^3$ w punkcie $x_0 = 1$.

Zadanie S3. (rozkład pestycydu) Masa pestycydu w glebie maleje zgodnie ze wzorem $m(t) = 100 e^{-0,05t}$ [mg], t – doby. Oblicz $m'(0)$ i $m'(20)$. Jak zmienia się tempo rozkładu w czasie?

Zadanie S4. (różniczka) Korzystając z różniczki, oblicz przybliżoną wartość: a) $\sqrt[3]{28}$, b) $\ln 1,02$.

Sprawdź, co umiesz (ok. 20 minut)

Zadanie T1. Oblicz pochodną funkcji $y = 3x^4 - 2\sqrt{x} + 5$.

Zadanie T2. Oblicz pochodną funkcji $y = x^2 e^x$.

Zadanie T3. Oblicz pochodną funkcji $y = \ln(3x^2 + 1)$.

Zadanie T4. Wyznacz równanie stycznej do wykresu $y = x^2 - 3x$ w punkcie $x_0 = 2$.

Zadanie T5. Stężenie zanieczyszczenia w zbiorniku maleje: $c(t) = 20 e^{-0,2t}$ [mg/l], t – doby. Oblicz tempo zmian stężenia w chwili $t = 0$.

Odpowiedzi

Zad. 1. a) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 8x_0 + 7 + 4\Delta x \rightarrow -1$; b) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 + \frac{1}{x_0(x_0 + \Delta x)} \rightarrow 2$.

Zad. 2. a) $8x - 8$; b) $40x^3 + 8x^{-3}$; c) $-\frac{12}{x^4}$; d) $\frac{1}{2\sqrt{x}} + 4x$; e) $\frac{56}{5}x^{2/5}$; f) $5x^{2/3}$, $\frac{10}{3\sqrt[3]{x}}$.

Zad. 3. a) $10x^4 + 32x^3 + 8$; b) $\ln x + 1$; c) $e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right)$; d) $\frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$; e) $\frac{4x}{(x^2+1)^2}$; f) $\frac{-24x^2 + 108x + 31}{(6x^2 - x + 10)^2}$.

Zad. 4. a) $30x(3x^2 + 1)^4$; b) $-2xe^{-x^2}$; c) $\frac{2x}{x^2+1}$; d) $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$; e) $-0,1e^{-0,1t}$; f) $\frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi t}{6}$; g) $e^{-2t}(1 - 2t)$.

Zad. 5. a) $y = 4x - 1$; b) $y = x + 1$; c) $y = x - 1$; d) $y = \frac{1}{4}x + 1$.

Zad. 6. $N'(t) = 50e^{0,1t} = 0,1N(t)$; $N'(0) = 50$ osobników/rok; $N'(10) = 50e \approx 136$ osobników/rok.

Zad. 7. a) $c'(t) = \frac{6(t^2+4)-6t \cdot 2t}{(t^2+4)^2} = \frac{24-6t^2}{(t^2+4)^2}$; $c'(1) = 0,72 > 0$ – stężenie rośnie; $c'(3) \approx -0,18 < 0$ – maleje; b) $t = 2$ – stężenie jest wtedy największe ($c(2) = 1,5$ mg/kg).

Zad. 8. a) $f(x) = \sqrt{x}$, $\sqrt{4,04} \approx 2 + \frac{0,04}{2 \cdot 2} = 2,01$; b) $dP = 2\pi \cdot 50 \cdot 1 \approx 314$ m², dokładnie $\pi(51^2 - 50^2) = 101\pi \approx 317$ m².

Zad. S1. a) $4 - x^2$; b) $6x^2 \sin x + 2x^3 \cos x$; c) $3e^{3x}$; d) $\frac{1}{x}$; e) $8(2x - 1)^3$; f) $e^{-x}(1 - x)$; g) $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$; h) $-3 \sin(3x + 1)$.

Zad. S2. $y = 3x - 2$.

Zad. S3. $m'(t) = -5e^{-0,05t}$; $m'(0) = -5$ mg/dobę, $m'(20) = -\frac{5}{e} \approx -1,84$ mg/dobę – rozkład z czasem zwalnia.

Zad. S4. a) $3 + \frac{1}{3 \cdot 9} \approx 3,037$; b) $\ln 1,02 \approx 0,02$.

Sprawdź. T1: $12x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}}$; T2: $e^x(x^2 + 2x)$; T3: $\frac{6x}{3x^2+1}$; T4: $f(2) = -2$, $f'(2) = 1$, $y = x - 4$; T5: $c'(t) = -4e^{-0,2t}$, $c'(0) = -4$ mg/(l·dobę).