MATEMATYKA • Technologia Drewna (studia niestacjonarne) • zestaw zadań

**Ćwiczenia 3** • 8.11.2026 • 3 h

# Zastosowania pochodnej. Optymalizacja

Reguła de L'Hospitala • monotoniczność i ekstrema • zadania optymalizacyjne (belka z kłody, pojemnik, koszty, zysk) • wypukłość i punkty przegięcia. Materiał teoretyczny: streszczenie wykładów 3–4.

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka • Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

**Przypomnienie**

De L'Hospital: $\left[\frac{0}{0}\right]$ lub $\left[\frac{\infty}{\infty}\right] \Rightarrow \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (osobno licznik i mianownik!).
$f' > 0$ – rośnie, $f' < 0$ – maleje; ekstremum: $f'(x_0) = 0$ i zmiana znaku ($+ \to -$: max, $- \to +$: min) lub $f''(x_0) < 0$: max, $f''(x_0) > 0$: min.
$f'' > 0$ – wypukła, $f'' < 0$ – wklęsła. Belka: $W = \frac{bh^2}{6}$ [NN, zginanie].
Optymalizacja: rysunek → funkcja celu jednej zmiennej → dziedzina → $f' = 0$ → znak $f'$ → odpowiedź.

## Zadania na ćwiczenia

**Zadanie 1.** Oblicz granice, korzystając z reguły de L'Hospitala:

**a)** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-4}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$

**d)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x}$ **e)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$ **f)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

**g)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2+1}{2x^2-x}$ **h)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ **i)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{e^x}$

**Zadanie 2.** (granice w praktyce) Oblicz granice, korzystając z reguły de L'Hospitala, i zinterpretuj wyniki (modele przybliżone):

**a)** koszt suszenia 1 m$^3$ tarcicy przy załadunku $x$ m$^3$: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3000+40x}{x}$;

**b)** wydajność szlifierza (elementy/h) po $t$ dniach praktyki: $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{60t}{t+20}$.

**Zadanie 3.** Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji:

**a)** $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ **b)** $f(x) = x^3 - 12x$ **c)** $f(x) = x^4 - 2x^2$

**d)** $f(x) = x\,e^x$ **e)** $f(x) = x - 2\ln x$ **f)** ★ $f(x) = x^2 e^{-x}$

**Zadanie 4.** (zysk tartaku) Miesięczny zysk tartaku [tys. zł] przy przetarciu $x$ setek m$^3$ drewna opisuje funkcja $Z(x) = -x^3 + 9x^2 + 48x - 100$, $x \in \langle 0; 12\rangle$ (wartości przykładowe). Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $Z$. Przy jakiej produkcji zysk jest największy i ile wynosi? Porównaj z wartościami na krańcach przedziału.

**Zadanie 5.** (belka z kłody) Z okrągłej kłody o średnicy $d = 24$ cm wycinamy belkę o przekroju prostokątnym $b \times h$. Wskaźnik wytrzymałości przekroju na zginanie wynosi $W = \frac{bh^2}{6}$.

**a)** Wyraź $W$ jako funkcję szerokości $b$ (wskazówka: $b^2 + h^2 = d^2$) i podaj jej dziedzinę.

**b)** Wyznacz wymiary $b$ i $h$ belki najbardziej wytrzymałej na zginanie oraz $W_{\max}$. Sprawdź, że $h : b = \sqrt{2}$.

**c)** Z tej samej kłody można wyciąć belkę $12 \times 20$ cm. Oblicz $W$, gdy belka jest ustawiona „na wysokość” ($b = 12$, $h = 20$) i „na płask” ($b = 20$, $h = 12$). Porównaj z $W_{\max}$.

**Zadanie 6.** (pojemnik) Z prostokątnego arkusza płyty pilśniowej o wymiarach $48 \times 30$ cm wycinamy w narożnikach kwadraty o boku $x$ i zaginamy boki, otrzymując otwarty pojemnik na drobne okucia. Zapisz objętość $V(x)$, podaj dziedzinę i wyznacz $x$, dla którego objętość jest największa.

**Zadanie 7.** (koszt magazynowania) Zakład produkujący okna zużywa rocznie 1600 m$^3$ tarcicy klejonej, zamawiając ją w równych partiach po $x$ m$^3$. Koszt jednej dostawy wynosi 500 zł, a przechowanie 1 m$^3$ przez rok – 40 zł; średni zapas w magazynie to $\frac{x}{2}$ (wartości przykładowe). Zapisz roczny koszt $K(x)$ dostaw i magazynowania. Jaka wielkość partii minimalizuje koszt? Ile dostaw w roku należy zamówić?

**Zadanie 8.** (koszt jednostkowy) Koszt wyprodukowania $x$ krzeseł w ciągu tygodnia wynosi $K(x) = 1800 + 30x + 0{,}5x^2$ [zł]. Wyznacz koszt jednego krzesła $k(x) = \frac{K(x)}{x}$. Przy jakiej produkcji koszt jednostkowy jest najmniejszy i ile wynosi?

**Zadanie 9.** (plac składowy) Prostokątny plac składowy kłód przylega jednym bokiem do ściany hali, a pozostałe trzy boki trzeba ogrodzić. Dysponujemy 120 m siatki. Jakie wymiary powinien mieć plac, aby jego pole było największe?

**Zadanie 10.** Wyznacz przedziały wypukłości i wklęsłości oraz punkty przegięcia:

**a)** $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ **b)** $f(x) = x^3 - 12x$ **c)** $u(t) = 10 + 40\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$

## Zadania do pracy samodzielnej

**Zadanie S1.** Oblicz granice: a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{x}$, c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{x^2}$.

**Zadanie S2.** Dla funkcji $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ wyznacz przedziały monotoniczności, ekstrema i punkt przegięcia. Naszkicuj wykres.

**Zadanie S3.** (belka z kłody) Z kłody o średnicy $d = 36$ cm wycinamy belkę o przekroju prostokątnym najbardziej wytrzymałą na zginanie. Oblicz jej wymiary $b$, $h$ oraz wskaźnik $W_{\max}$.

## Sprawdź, co umiesz (ok. 20 minut)

**Zadanie T1.** Oblicz $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{x}$ oraz $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$.

**Zadanie T2.** Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji $f(x)=x^3-3x+2$.

**Zadanie T3.** Z kwadratowego arkusza sklejki o boku 60 cm wycinamy w narożnikach kwadraty o boku $x$ i zaginamy boki, otrzymując otwarte pudełko. Dla jakiego $x$ objętość pudełka jest największa? Ile wynosi?

## Odpowiedzi

**Zad. 1.** a) $\frac{2x}{1} \to 6$; b) $\frac{3x^2}{2x} \to 3$; c) $\frac{2x+1}{2x} \to \frac{3}{2}$; d) $\frac{2e^{2x}}{1} \to 2$; e) $\frac{1/x}{1} \to 1$; f) $\frac{1/(1+x)}{1} \to 1$; g) $\frac{8x}{4x-1} \overset{H}{=} \frac{8}{4} = 2$; h) $\frac{1/x}{1/(2\sqrt{x})} = \frac{2}{\sqrt{x}} \to 0$; i) reguła trzykrotnie: $\frac{6}{e^x} \to 0$.

**Zad. 2.** a) $\frac{40}{1} = 40$ zł – przy bardzo dużym załadunku koszt 1 m$^3$ zbliża się do kosztu zmiennego 40 zł; b) $\frac{60}{1} = 60$ – wydajność pracownika zbliża się do 60 elementów na godzinę.

**Zad. 3.** a) $f' = 3(x-1)(x-3)$: rośnie na $(-\infty;1)$ i $(3;\infty)$, maleje na $(1;3)$; max $f(1) = 4$, min $f(3) = 0$; b) $f' = 3(x-2)(x+2)$: rośnie na $(-\infty;-2)$ i $(2;\infty)$, maleje na $(-2;2)$; max $f(-2) = 16$, min $f(2) = -16$; c) $f' = 4x(x-1)(x+1)$: maleje na $(-\infty;-1)$ i $(0;1)$, rośnie na $(-1;0)$ i $(1;\infty)$; min $f(-1) = f(1) = -1$, max $f(0) = 0$; d) $f' = (x+1)e^x$: maleje na $(-\infty;-1)$, rośnie na $(-1;\infty)$; min $f(-1) = -\frac{1}{e} \approx -0{,}37$; e) $D = (0;\infty)$, $f' = \frac{x-2}{x}$: maleje na $(0;2)$, rośnie na $(2;\infty)$; min $f(2) = 2 - 2\ln 2 \approx 0{,}61$; f) $f' = x(2-x)e^{-x}$: maleje na $(-\infty;0)$ i $(2;\infty)$, rośnie na $(0;2)$; min $f(0) = 0$, max $f(2) = \frac{4}{e^2} \approx 0{,}54$.

**Zad. 4.** $Z'(x) = -3x^2 + 18x + 48 = -3(x-8)(x+2)$; w $\langle 0;12\rangle$: rośnie na $(0;8)$, maleje na $(8;12)$; max $Z(8) = 348$ tys. zł przy 800 m$^3$; $Z(0) = -100$, $Z(12) = 44$.

**Zad. 5.** a) $W(b) = \frac{b(576-b^2)}{6}$, $b \in (0;24)$; b) $W'(b) = \frac{576-3b^2}{6} = 0$: $b = 8\sqrt{3} \approx 13{,}9$ cm, $h = 8\sqrt{6} \approx 19{,}6$ cm, $\frac{h}{b} = \sqrt{2}$; $W_{\max} = 512\sqrt{3} \approx 887$ cm$^3$; c) „na wysokość”: $W = \frac{12\cdot 20^2}{6} = 800$ cm$^3$, „na płask”: $W = \frac{20\cdot 12^2}{6} = 480$ cm$^3$ (o 40% mniej); obie mniejsze od $W_{\max}$.

**Zad. 6.** $V(x) = x(48-2x)(30-2x) = 4x^3 - 156x^2 + 1440x$, $x \in (0;15)$; $V' = 12x^2 - 312x + 1440 = 12(x-6)(x-20)$; $x = 6$ cm, $V_{\max} = 6 \cdot 36 \cdot 18 = 3888$ cm$^3$.

**Zad. 7.** $K(x) = 500 \cdot \frac{1600}{x} + 40 \cdot \frac{x}{2} = \frac{800\,000}{x} + 20x$, $x > 0$; $K' = -\frac{800\,000}{x^2} + 20 = 0$: $x = 200$ m$^3$, $K_{\min} = 8000$ zł, 8 dostaw rocznie.

**Zad. 8.** $k(x) = \frac{1800}{x} + 30 + 0{,}5x$; $k'(x) = -\frac{1800}{x^2} + 0{,}5 = 0$: $x = 60$ krzeseł, $k_{\min} = 30 + 30 + 30 = 90$ zł.

**Zad. 9.** $x$ – boki prostopadłe do ściany: $P(x) = x(120-2x)$, $x \in (0;60)$; $P' = 120 - 4x = 0$: $x = 30$ m, bok wzdłuż ściany 60 m, $P_{\max} = 1800$ m$^2$.

**Zad. 10.** a) $f'' = 6x - 12$: wklęsła na $(-\infty;2)$, wypukła na $(2;\infty)$, punkt przegięcia $(2;2)$; b) $f'' = 6x$: wklęsła na $(-\infty;0)$, wypukła na $(0;\infty)$, punkt przegięcia $(0;0)$; c) $u'' = 0{,}4e^{-0{,}1t} > 0$ – wypukła, brak punktów przegięcia (suszenie stale zwalnia).

**Zad. S1.** a) $\frac{3x^2}{2x} \to \frac{3}{2}$; b) $\frac{e^x + e^{-x}}{1} \to 2$; c) $\frac{2e^{2x}}{2x} \overset{H}{=} \frac{4e^{2x}}{2} \to \infty$.

**Zad. S2.** $f' = 6(x-2)(x+1)$: rośnie na $(-\infty;-1)$ i $(2;\infty)$, maleje na $(-1;2)$; max $f(-1) = 7$, min $f(2) = -20$; $f'' = 12x - 6$: punkt przegięcia $\left(\frac{1}{2};-\frac{13}{2}\right)$.

**Zad. S3.** $b = \frac{36}{\sqrt{3}} = 12\sqrt{3} \approx 20{,}8$ cm, $h = 12\sqrt{6} \approx 29{,}4$ cm, $W_{\max} = 1728\sqrt{3} \approx 2993$ cm$^3$.

**Sprawdź.** T1: $\frac{3e^{3x}}{1} \to 3$; 0; T2: $f' = 3(x-1)(x+1)$: rośnie na $(-\infty;-1)$ i $(1;\infty)$, maleje na $(-1;1)$; max $f(-1) = 4$, min $f(1) = 0$; T3: $V(x) = x(60-2x)^2$, $x \in (0;30)$, $V' = 12(x-10)(x-30)$: $x = 10$ cm, $V_{\max} = 16\,000$ cm$^3$ = 16 l.