

Ćwiczenia 3

Własności funkcji, złożenie, funkcja odwrotna, funkcje elementarne

Parzystość i monotoniczność • złożenie funkcji • funkcja odwrotna • równania wykładnicze i logarytmiczne • zastosowania. Czas: 2 h. Materiał teoretyczny: streszczenie wykładu 2–3.

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka • Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

Przypomnienie

Parzysta: $f(-x) = f(x)$; nieparzysta: $f(-x) = -f(x)$. Złożenie: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Funkcja odwrotna: z równania $y = f(x)$ wyznaczamy x i zamieniamy oznaczenia $x \leftrightarrow y$; wykresy f i f^{-1} są symetryczne względem prostej $y = x$. $a^u = a^w \iff u = w$; $\log_a u = \log_a w \iff u = w$ ($u, w > 0$); $\log_a x = b \iff x = a^b$.

Zadania na ćwiczenia

Zadanie 1. Zbadaj, czy funkcja jest parzysta, nieparzysta, czy żadna z nich:

- | | | | |
|-----------------|-------------------|--------------|--------------------------|
| a) $x^4 - 3x^2$ | b) $x^3 - 5x$ | c) $x^2 + x$ | d) $\frac{x^2 + 1}{x}$ |
| e) $x \sin x$ | f) $\cos x + x^2$ | g) e^x | h) $\frac{x^3}{x^2 + 1}$ |

Zadanie 2. Sprawdź, czy funkcja jest rosnąca czy malejąca na podanym zbiorze (w podpunkcie a) uzasadnij z definicji):

- | | | |
|--------------------------------|------------------------------------|--|
| a) $f(x) = 3 - 4x, \mathbb{R}$ | b) $f(x) = x^2 - 2x, (-\infty; 1)$ | c) $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \langle 0; \infty \rangle$ |
|--------------------------------|------------------------------------|--|

Zadanie 3. Wyznacz funkcje złożone $f \circ g$ oraz $g \circ f$ i podaj ich dziedziny:

- | | | |
|---------------------------------------|--------------------------------------|---|
| a) $f(x) = x^2, g(x) = 2^x$ | b) $f(x) = \sin x, g(x) = x^2$ | c) $f(x) = 2x + 5, g(x) = \operatorname{tg} x$ |
| d) $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = \ln x$ | e) $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = x^2 + 2$ | f) ★ $f(x) = x^3, g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ |

Zadanie 4. Znajdź funkcje elementarne, z których złożona jest funkcja h :

- | | | | |
|------------------------|----------------------------------|------------------------------------|--------------------------|
| a) $h(x) = \sin^2 x$ | b) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ | c) $h(x) = \sin(\cos x)$ | d) $h(x) = \ln(x+1)^2$ |
| e) $h(x) = \ln^2(x+1)$ | f) $h(x) = \sqrt{\cos x + 2}$ | g) $h(x) = \cos \frac{1}{x^2 + 5}$ | h) $h(x) = e^{\sqrt{x}}$ |

Zadanie 5. Wyznacz funkcję odwrotną; w podpunktach a) i d) naszkicuj wykresy f i f^{-1} w jednym układzie:

a) $f(x) = 2x + 3$

b) $f(x) = x^3 + 1$

c) $f(x) = \ln(x + 1)$

d) $f(x) = e^{x-2}$

e) $f(x) = x^2 + 1, x \in \langle 0; \infty \rangle$

f) $f(x) = \frac{x-1}{3}$

Zadanie 6. Rozwiąż równania:

a) $2^{3x+2} = 2^{-x^2}$

b) $\log_4 x = 3$

c) $\log_2(2x + 1) = \log_2 3$

d) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{4x^2} = 9^{-2x^3}$

e) $e^{2x} = 5$

f) $\ln(x - 1) + \ln(x + 1) = \ln 3$

Zadanie 7. (zastosowanie) Liczba mieszkańców pewnego miasta (w tysiącach) od roku 2000 wyraża się wzorem $y = 800 \cdot 2^{0,12x}$, gdzie x – liczba lat po roku 2000.

a) Ilu mieszkańców liczyło miasto w roku 2000?

b) Po ilu latach liczba mieszkańców po raz pierwszy przekroczy 12 800 000?

Zadanie 8. Wiedząc, że wyrażenie $\log_2 \frac{16^x}{4^y}$ można zapisać w postaci $ax + by$, znajdź a i b .

Zadania do pracy samodzielnej

Zadanie S1. Zbadaj parzystość funkcji: a) $x^5 + x^3$, b) $x^2 \cos x$, c) $e^x + e^{-x}$, d) $\sin x + \cos x$.

Zadanie S2. Wyznacz $f \circ g$ i $g \circ f$: a) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 1 - x^2$; b) $f(x) = e^x$, $g(x) = 3x - 1$; c) $f(x) = \ln x$, $g(x) = x^2 + 1$.

Zadanie S3. Wyznacz funkcję odwrotną: a) $f(x) = 5 - 2x$; b) $f(x) = \sqrt[3]{x - 2}$; c) $f(x) = 10^x$; d) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

Zadanie S4. Rozwiąż równania: a) $2^{x+3} = 32$; b) $\log_3(x + 2) = 2$; c) $9^x = 27$; d) $\ln x^2 = 2 \ln 3$, $x > 0$.

Zadanie S5. (zastosowanie) Moc modułu fotowoltaicznego po t latach pracy wynosi $P(t) = 400 \cdot 0,995^t$ [W]. Po ilu latach moc spadnie poniżej 360 W? (Wskazówka: zlogarytmuj nierówność.)

Sprawdź, co umiesz (ok. 20 minut)

Zadanie T1. Zbadaj parzystość funkcji $f(x) = x|x|$.

Zadanie T2. Dla $f(x) = \ln x$ i $g(x) = x^2 - 4$ wyznacz $f \circ g$ i jej dziedzinę.

Zadanie T3. Wyznacz funkcję odwrotną do $f(x) = e^{2x} + 1$.

Zadanie T4. Rozwiąż równanie $\log_2(x + 1) + \log_2(x - 1) = 3$.

Odpowiedzi

Zad. 1. a) parzysta; b) nieparzysta; c) żadna; d) nieparzysta; e) parzysta; f) parzysta; g) żadna; h) nieparzysta.

Zad. 2. a) malejąca ($x_1 < x_2 \Rightarrow 3 - 4x_1 > 3 - 4x_2$); b) malejąca; c) malejąca.

Zad. 3. a) $f \circ g = 2^{2x}$, $g \circ f = 2^{x^2}$, $D = \mathbb{R}$; b) $\sin(x^2)$, $\sin^2 x$, $D = \mathbb{R}$; c) $2 \operatorname{tg} x + 5$, $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$; $\operatorname{tg}(2x + 5)$, $D = \{x: 2x + 5 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$; d) $\frac{1}{\ln x}$, $D = (0; 1) \cup (1; \infty)$; $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$, $D = (0; \infty)$; e) $\sqrt{x^2 + 2}$, $D = \mathbb{R}$; $x + 2$, $D = (0; \infty)$; f) $f \circ g = \frac{1}{x}$, $g \circ f = \frac{1}{x}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Zad. 4. np. a) $f(u) = u^2$, $u = \sin x$; b) $f(u) = \frac{1}{u}$, $u = \sqrt{w}$, $w = x + 2$; c) $\sin u$, $u = \cos x$; d) $\ln u$, $u = w^2$, $w = x + 1$; e) u^2 , $u = \ln w$, $w = x + 1$; f) $\sqrt{u}$, $u = \cos x + 2$; g) $\cos u$, $u = \frac{1}{w}$, $w = x^2 + 5$; h) e^u , $u = \sqrt{x}$.

Zad. 5. a) $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$; b) $\sqrt[3]{x-1}$; c) $e^x - 1$; d) $\ln x + 2$, $x > 0$; e) $\sqrt{x-1}$, $x \geq 1$; f) $3x + 1$.

Zad. 6. a) $x \in \{-2; -1\}$; b) $x = 64$; c) $x = 1$; d) $x \in \{0; \frac{1}{2}\}$; e) $x = \frac{\ln 5}{2}$; f) $x = 2$ ($x = -2$ nie należy do dziedziny).

Zad. 7. a) 800 tys.; b) $2^{0,12x} > 16 \iff x > 33,3$ – po 34 latach.

Zad. 8. $\log_2 \frac{2^{4x}}{2^{2y}} = 4x - 2y$, $a = 4$, $b = -2$.

Zad. S1. a) nieparzysta; b) parzysta; c) parzysta; d) żadna.

Zad. S2. a) $f \circ g = \sqrt{1 - x^2}$, $D = (-1; 1)$; $g \circ f = 1 - x$, $D = (0; \infty)$; b) e^{3x-1} ; $3e^x - 1$; c) $\ln(x^2 + 1)$; $\ln^2 x + 1$, $x > 0$.

Zad. S3. a) $\frac{5-x}{2}$; b) $x^3 + 2$; c) $\log x$; d) $\frac{1}{x}$.

Zad. S4. a) $x = 2$; b) $x = 7$; c) $x = \frac{3}{2}$; d) $x = 3$.

Zad. S5. $0,995^t < 0,9 \iff t > \frac{\ln 0,9}{\ln 0,995} \approx 21,02$ – po 22 latach ($P(22) \approx 358,2$ W).

Sprawdź. T1: nieparzysta; T2: $\ln(x^2 - 4)$, $D = (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$; T3: $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln(x - 1)$, $x > 1$; T4: $x^2 - 1 = 8$, $x = 3$.