

Ćwiczenia 4

Zastosowania pochodnej

Reguła de L'Hospitala • monotoniczność i ekstrema • zadania optymalizacyjne • wypukłość i punkty przegięcia • badanie przebiegu funkcji. Materiał teoretyczny: streszczenie wykładu 4.

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka • Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

Przypomnienie

De L'Hospital: $\left[\frac{0}{0}\right]$ lub $\left[\frac{\infty}{\infty}\right] \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. $f' > 0$ – rośnie, $f' < 0$ – maleje; ekstremum: $f'(x_0) = 0$ i zmiana znaku ($+$ $\rightarrow$ $-$: max, $-$ $\rightarrow$ $+$: min).
 $f'' > 0$ – wypukła $\cup$, $f'' < 0$ – wklęsła $\cap$; punkt przegięcia: $f''(x_0) = 0$ i zmiana znaku f'' .



Zadania na ćwiczenia

Zadanie 1. Oblicz granice, korzystając z reguły de L'Hospitala:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 3}{2x - 1}$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x}$

i) ★ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

Zadanie 2. (stężenie) Stężenie pestycydu w wodzie gruntowej po oprysku opisuje funkcja $c(t) = 8t e^{-0,25t}$ [$\mu\text{g/l}$], $t \geq 0$ – doby.

a) Oblicz $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t)$ i zinterpretuj wynik.

b) Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $c(t)$. Po ilu dobach stężenie jest największe i ile wynosi?

Zadanie 3. Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

b) $f(x) = x^3 - 12x$

c) $f(x) = x^4 - 2x^2$

d) $f(x) = x e^x$

e) $f(x) = x - 2 \ln x$

f) ★ $f(x) = x^2 e^{-x}$

Zadanie 4. Dla funkcji z zadania 3 a) i b) wyznacz przedziały wypukłości i wklęsłości oraz punkty przegięcia.

Zadanie 5. (optymalizacja) Wzdłuż rzeki wydzielono prostokątny teren ochronny, ogradzając go z trzech stron (od strony rzeki ogrodzenie jest zbędne). Dysponujemy 600 m siatki. Jakie wymiary powinien mieć teren, aby jego pole było największe?

Zadanie 6. (optymalizacja) Koszt (w zł) budowy i eksploatacji osadnika zależy od jego pojemności x [m³] według wzoru $K(x) = 200x + \frac{80\,000}{x}$, $x > 0$. Dla jakiej pojemności koszt jest najmniejszy? Ile wynosi?

Zadanie 7. (plon) Plon $y = 30 + 0,8x - 0,004x^2$ [dt/ha] zależy od dawki azotu x [kg/ha]. Korzystając z pochodnej, wyznacz dawkę, przy której plon jest największy.

Zadania do pracy samodzielnej

Zadanie S1. Oblicz granice: a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$, b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$, c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}}{x^2}$.

Zadanie S2. Zbadaj przebieg zmienności funkcji i naszkicuj jej wykres:

a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$

b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

Zadanie S3. (optymalizacja) Z prostokątnego arkusza blachy 80×50 cm wycinamy w narożnikach kwadraty o boku x i zaginamy boki, otrzymując otwarty pojemnik na odpady. Dla jakiego x objętość $V(x) = x(80 - 2x)(50 - 2x)$ jest największa?

Sprawdź, co umiesz (ok. 25 minut)

Zadanie T1. Oblicz $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ oraz $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$.

Zadanie T2. Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji $f(x) = x^3 - 3x + 2$ oraz jej punkt przegięcia.

Zadanie T3. Liczba bakterii w osadzie czynnym zmienia się według wzoru $N(t) = 1000 + 60t - 3t^2$, $t \in \langle 0; 20 \rangle$ (godziny). Kiedy liczba bakterii jest największa?

Odpowiedzi

Zad. 1. a) 4; b) $\frac{3x^2}{2x} \rightarrow 3$; c) 3; d) 1; e) 1; f) $\frac{5}{2}$; g) $\frac{1/x}{1/(2\sqrt{x})} = \frac{2}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$; h) trzykrotnie: 0; i) $\frac{\sin x}{2x} \rightarrow \frac{1}{2}$.

Zad. 2. a) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{8t}{e^{0,25t}} \stackrel{H}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{8}{0,25e^{0,25t}} = 0$ – pestycyd zostaje usunięty z wody; b) $c'(t) = 8e^{-0,25t}(1 - 0,25t)$: rośnie na $(0; 4)$, maleje na $(4; \infty)$; maksimum po 4 dobach, $c(4) = \frac{32}{e} \approx 11,8 \mu\text{g/l}$.

Zad. 3. a) $f' = 3(x-1)(x-3)$: rośnie na $(-\infty; 1)$, $(3; \infty)$, maleje na $(1; 3)$; $\max f(1) = 4$, $\min f(3) = 0$; b) $f' = 3(x-2)(x+2)$: $\max f(-2) = 16$, $\min f(2) = -16$; c) $f' = 4x(x-1)(x+1)$: $\min f(\pm 1) = -1$, $\max f(0) = 0$; d) $f' = (x+1)e^x$: maleje na $(-\infty; -1)$, rośnie na $(-1; \infty)$; $\min f(-1) = -\frac{1}{e}$; e) $D = (0; \infty)$, $f' = \frac{x-2}{x}$: $\min f(2) = 2 - 2\ln 2 \approx 0,61$; f) $f' = x(2-x)e^{-x}$: $\min f(0) = 0$, $\max f(2) = \frac{4}{e^2} \approx 0,54$.

Zad. 4. a) $f'' = 6(x-2)$: wklęsła na $(-\infty; 2)$, wypukła na $(2; \infty)$, punkt przegięcia $(2; 2)$; b) $f'' = 6x$: punkt przegięcia $(0; 0)$.

Zad. 5. $P(x) = x(600 - 2x)$, $P' = 600 - 4x = 0$, $x = 150$ m (boki prostopadłe do rzeki), 300 m wzdłuż rzeki; $P_{\max} = 45\,000 \text{ m}^2$.

Zad. 6. $K'(x) = 200 - \frac{80\,000}{x^2} = 0$, $x = 20 \text{ m}^3$; $K_{\min} = 8000 \text{ zł}$.

Zad. 7. $y' = 0,8 - 0,008x = 0$, $x = 100 \text{ kg/ha}$ ($y = 70 \text{ dt/ha}$).

Zad. S1. a) $\frac{3}{2}$; b) 2; c) ∞ .

Zad. S2. a) miejsca zerowe $x = -2$, $x = 1$; $\max f(-1) = 4$, $\min f(1) = 0$; wklęsła na $(-\infty; 0)$, wypukła na $(0; \infty)$, punkt przegięcia $(0; 2)$; b) $f' = 6(x-2)(x+1)$: $\max f(-1) = 7$, $\min f(2) = -20$; punkt przegięcia $(\frac{1}{2}; -\frac{13}{2})$.

Zad. S3. $V'(x) = 12x^2 - 520x + 4000 = 0$, $x \in \{10; \frac{100}{3}\}$; w dziedzinie $(0; 25)$: $x = 10 \text{ cm}$, $V_{\max} = 18\,000 \text{ cm}^3$.

Sprawdź. T1: 6; 0; T2: rośnie na $(-\infty; -1)$ i $(1; \infty)$, maleje na $(-1; 1)$; $\max f(-1) = 4$, $\min f(1) = 0$; punkt przegięcia $(0; 2)$; T3: $N' = 60 - 6t = 0$, $t = 10 \text{ h}$, $N_{\max} = 1300$.