MATEMATYKA • Technologia Drewna (studia niestacjonarne) • zestaw zadań

Ćwiczenia 4 • 29.11.2026 • 3 h

Całka nieoznaczona i oznaczona

Całkowanie wprost • przez podstawienie • przez części • od tempa zmian do wielkości • wzór Newtona–Leibniza • pola obszarów • wartość średnia i wielkość całkowita • objętość kłody. Materiał teoretyczny: streszczenie wykładów 5–6.

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka • Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

Przypomnienie

$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ \ (n \neq -1)$, $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

$\int e^{kx}\,dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C$, $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$

podstawienie: $\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt, \ \ t = g(x)$

przez części: $\int f\,g'\,dx = f\,g - \int f'\,g\,dx$

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$; pole: $P = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx$

średnia: $f_{śr} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$; $Q = \int_{t_1}^{t_2} q(t)\,dt$

bryła obrotowa: $V = \pi \int_a^b r^2(x)\,dx$

Smalian: $V = L\frac{S_1+S_2}{2}$; Huber: $V = S_m L$; $S = \frac{\pi d^2}{4}$

Zadania na ćwiczenia

Zadanie 1. Oblicz całki (całkowanie wprost):

a) $\int (6x^2 - 4x + 3)\,dx$ **b)** $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx$ **c)** $\int \left(\frac{3}{x} + 2e^x\right)dx$

d) $\int (4\sin x - \cos x)\,dx$ **e)** $\int (x+2)^2\,dx$ **f)** $\int \frac{x^2 - 3x}{x}\,dx$

g) $\int 2^x\,dx$ **h)** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}$

Zadanie 2. Oblicz całki metodą podstawienia:

a) $\int e^{4x}\,dx$ **b)** $\int (3x-1)^4\,dx$ **c)** $\int 2x\,e^{x^2}\,dx$

d) $\int \frac{x}{x^2+5}\,dx$ **e)** $\int \cos 2x\,dx$ **f)** $\int x(x^2+1)^3\,dx$

g) $\int \frac{dx}{2x+1}$ **h)** $\int e^{-0{,}2t}\,dt$ **i)** ★ $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

Zadanie 3. Oblicz całki metodą przez części:

a) $\int x\,e^{2x}\,dx$ **b)** $\int x\sin x\,dx$ **c)** $\int x\ln x\,dx$

d) $\int (x+1)\,e^{-x}\,dx$ **e)** ★ $\int x^2 e^x\,dx$

Zadanie 4. (suszenie) Wilgotność tarcicy w suszarni maleje w tempie $u'(t) = -3\,\mathrm{e}^{-0{,}075t}$ [%/h], t w godzinach; wilgotność początkowa $u(0) = 50\%$ (model przybliżony).

a) Wyznacz $u(t)$.

b) Oblicz wilgotność po dobie ($t = 24$ h) oraz $\lim\limits_{t\to\infty} u(t)$. Zinterpretuj granicę.

c) Po ilu godzinach wilgotność spadnie do 12%?

Zadanie 5. Oblicz całki oznaczone:

a) $\displaystyle\int_0^2 (3x^2 + 2x)\,dx$ **b)** $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$ **c)** $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{2}{x}\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,dx$ **e)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$ **f)** $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,dx$

Zadanie 6. Wykonaj rysunek i oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi:

a) $y = 4 - x^2,\ y = 0$ **b)** $y = x^2 - 2x,\ y = 0$

c) $y = x^2,\ y = 2x$ **d)** $y = x^2,\ y = x + 6$

Zadanie 7. (deska) Deska nieobrzynana ma grubość 4 cm, jej dolna płaszczyzna ma szerokość 20 cm, a górna 12 cm. Obłe krawędzie opisuje parabola $y = 6{,}25 - \frac{x^2}{16}$ [cm] (oś Ox na dolnej płaszczyźnie, oś Oy w środku deski; model przybliżony).

a) Sprawdź, że parabola przechodzi przez punkty $(10;0)$ i $(6;4)$. Wykonaj rysunek przekroju.

b) Oblicz pole przekroju deski. *Wskazówka:* od pola prostokąta 20×4 odejmij pola dwóch obłzyn (obszarów między prostą $y = 4$ a parabolą dla $6 \le |x| \le 10$).

c) Deskę obrzynamy do szerokości 12 cm. Jaki procent pola przekroju trafia do odpadu?

Zadanie 8. (suszarnia) Partia tarcicy z zadania 4 ma w stanie absolutnie suchym masę $m_0 = 5$ t (wartość przykładowa).

a) Podczas nagrzewania suszarni temperatura rośnie liniowo: $T(t) = 20 + 7{,}5t$ [°C], $t \in \langle 0;8\rangle$. Oblicz średnią temperaturę w tym czasie.

b) Oblicz średnią wilgotność tarcicy w ciągu pierwszej doby suszenia.

c) Masa wody w drewnie wynosi $m_w = m_0 \cdot \frac{u}{100}$, więc woda odparowuje w tempie $q(t) = -m_0 \frac{u'(t)}{100}$ [kg/h]. Wyznacz $q(t)$ i oblicz, ile wody odparowało w ciągu pierwszej doby. Sprawdź wynik, korzystając z $u(0)$ i $u(24)$.

Zadanie 9. (kłoda) Objętość kłody obliczamy ze wzoru na objętość bryły obrotowej $V = \pi \int_0^L r^2(x)\,dx$.

a) Oblicz objętość bryły powstałej z obrotu wokół osi Ox wykresu funkcji $y = \sqrt{x}$, $x \in [0;4]$ (paraboloida obrotowa).

b) Kłoda ma długość $L = 4$ m i średnice czół $d_1 = 36$ cm, $d_2 = 24$ cm. Przyjmij, że $r^2(x)$ zmienia się liniowo (paraboloida). Wyznacz $r^2(x)$, oblicz objętość całką i porównaj z wynikiem ze wzoru Smaliana.

c) Jaką średnicę ma kłoda z punktu b) w połowie długości? Oblicz objętość ze wzoru Hubera.

d) ★ Przyjmij teraz, że kłoda z punktu b) jest stożkiem ściętym (średnica maleje liniowo). Oblicz jej objętość całką oraz wzorami Smaliana i Hubera; podaj błędy procentowe obu wzorów.

Zadania do pracy samodzielnej

Zadanie S1. Oblicz całki:

a) $\int \left(x^3 + \frac{2}{x} - \mathrm{e}^x\right) dx$ **b)** $\int (5x+2)^3\, dx$ **c)** $\int x \cos x\, dx$

d) $\int_0^2 (x^3 - x)\, dx$ **e)** $\int_0^3 \mathrm{e}^{x/3}\, dx$

Zadanie S2. Wykonaj rysunek i oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi: a) $y = x^2$, $y = 3x$; b) $y = 9 - x^2$, $y = 0$.

Zadanie S3. (kłoda) Kłoda o długości 6 m ma średnice czół 50 cm i 30 cm. Traktując ją jak stożek ścięty, oblicz objętość całką oraz wzorami Smaliana i Hubera. Który wzór zawyża, a który zaniża objętość?

Sprawdź, co umiesz (ok. 20 minut)

Zadanie T1. Oblicz $\int \left(4x^3 - \frac{3}{x} + \mathrm{e}^{2x}\right) dx$.

Zadanie T2. Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi $y = x^2$ i $y = x + 2$.

Zadanie T3. Kłoda o długości 5 m ma średnice czół 30 cm i 20 cm. Przyjmując, że ma kształt paraboloidy obrotowej, oblicz jej objętość. Jaką średnicę ma kłoda w połowie długości?

Odpowiedzi

Zad. 1. a) $2x^3 - 2x^2 + 3x + C$; b) $\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{x} + C$; c) $3\ln|x| + 2e^x + C$; d) $-4\cos x - \sin x + C$; e) $\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x + C$; f) $\frac{x^2}{2} - 3x + C$; g) $\frac{2^x}{\ln 2} + C$; h) $\int x^{-3/2}dx = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C$.

Zad. 2. a) $\frac{1}{4}e^{4x} + C$; b) $\frac{(3x-1)^5}{15} + C$; c) $t = x^2$: $e^{x^2} + C$; d) $\frac{1}{2}\ln(x^2+5) + C$; e) $\frac{1}{2}\sin 2x + C$; f) $t = x^2+1$: $\frac{(x^2+1)^4}{8} + C$; g) $\frac{1}{2}\ln|2x+1| + C$; h) $-5e^{-0{,}2t} + C$; i) $t = \ln x$: $\frac{1}{2}\ln^2 x + C$.

Zad. 3. a) $f = x$, $g' = e^{2x}$: $\frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C = \frac{1}{4}(2x-1)e^{2x} + C$; b) $-x\cos x + \sin x + C$; c) $f = \ln x$, $g' = x$: $\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$; d) $-(x+2)e^{-x} + C$; e) dwukrotnie przez części: $e^x(x^2 - 2x + 2) + C$.

Zad. 4. a) $u(t) = \int -3e^{-0{,}075t}dt = 40e^{-0{,}075t} + C$, $u(0) = 40 + C = 50 \Rightarrow C = 10$, $u(t) = 10 + 40e^{-0{,}075t}$; b) $u(24) = 10 + 40e^{-1{,}8} \approx 16{,}6\%$; $\lim u(t) = 10\%$ – wilgotność równowagowa; c) $40e^{-0{,}075t} = 2$, $t = \frac{\ln 20}{0{,}075} \approx 39{,}9$ h ≈ 40 h.

Zad. 5. a) $\left[x^3 + x^2\right]_0^2 = 12$; b) $\frac{14}{3}$; c) 2; d) $\frac{e^2-1}{2} \approx 3{,}19$; e) 1; f) $\left[e^x(x-1)\right]_0^1 = 1$.

Zad. 6. a) $x \in [-2;2]$, $P = \frac{32}{3}$; b) $x \in [0;2]$, funkcja ujemna: $P = \int_0^2 (2x - x^2)\,dx = \frac{4}{3}$; c) $x \in [0;2]$, $P = \int_0^2 (2x - x^2)\,dx = \frac{4}{3}$; d) $x^2 = x + 6 \iff x \in \{-2;3\}$, $P = \int_{-2}^3 (x + 6 - x^2)\,dx = \frac{125}{6} \approx 20{,}8$.

Zad. 7. a) $6{,}25 - \frac{100}{16} = 0$, $6{,}25 - \frac{36}{16} = 4$; b) jedna obłżyna: $\int_6^{10}(\frac{x^2}{16} - 2{,}25)dx = \left[\frac{x^3}{48} - 2{,}25x\right]_6^{10} = \frac{22}{3}$, $P = 80 - \frac{44}{3} = \frac{196}{3} \approx 65{,}3$ cm^2 (lub $P = 48 + 2\int_6^{10}(6{,}25 - \frac{x^2}{16})dx$); c) zostaje $12 \cdot 4 = 48$ cm^2, odpad $\approx 17{,}3$ cm^2, tj. ok. 26,5%.

Zad. 8. a) $T_{śr} = \frac{1}{8}\int_0^8 (20{+}7{,}5t)\,dt = \frac{1}{8}\cdot 400 = 50°$C; b) $u_{śr} = \frac{1}{24}\int_0^{24}(10{+}40e^{-0{,}075t})\,dt = 10 + \frac{40}{24\cdot 0{,}075}(1 - e^{-1{,}8}) \approx 28{,}5\%$; c) $q(t) = 150\,e^{-0{,}075t}$ kg/h, $Q = \int_0^{24} q(t)\,dt = 2000(1 - e^{-1{,}8}) \approx 1669$ kg; sprawdzenie: $5000 \cdot \frac{50-16{,}6}{100} \approx 1669$ kg.

Zad. 9. a) $V = \pi\int_0^4 x\,dx = 8\pi \approx 25{,}1$; b) $R_1 = 0{,}18$, $R_2 = 0{,}12$ m; $r^2(x) = 0{,}0324 - 0{,}0045x$; $V = \pi\left[0{,}0324x - 0{,}00225x^2\right]_0^4 = 0{,}0936\pi \approx 0{,}294$ m^3 – tyle samo co ze wzoru Smaliana $4 \cdot \frac{\pi(0{,}0324+0{,}0144)}{2}$; c) $r^2(2) = 0{,}0234$, $d_m = 2\sqrt{0{,}0234} \approx 0{,}306$ m $= 30{,}6$ cm; Huber: $\pi \cdot 0{,}0234 \cdot 4 \approx 0{,}294$ m^3 (ten sam wynik); d) $V = \frac{4\pi}{3}(0{,}0324 + 0{,}0216 + 0{,}0144) \approx 0{,}287$ m^3; Smalian 0,294 m^3 (+2,6%), Huber $\pi \cdot 0{,}15^2 \cdot 4 \approx 0{,}283$ m^3 (−1,3%).

Zad. S1. a) $\frac{x^4}{4} + 2\ln|x| - e^x + C$; b) $\frac{(5x+2)^4}{20} + C$; c) $x\sin x + \cos x + C$; d) $\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2$; e) $\left[3e^{x/3}\right]_0^3 = 3(e-1) \approx 5{,}15$.

Zad. S2. a) $x \in [0;3]$, $P = \int_0^3 (3x - x^2)\,dx = \frac{9}{2}$; b) $x \in [-3;3]$, $P = 36$.

Zad. S3. całka: $\frac{6\pi}{3}(0{,}0625 + 0{,}0375 + 0{,}0225) = 0{,}245\pi \approx 0{,}770$ m^3; Smalian: $6 \cdot \frac{\pi(0{,}0625+0{,}0225)}{2} \approx 0{,}801$ m^3 (zawyża o ok. 4%); Huber: $\pi \cdot 0{,}2^2 \cdot 6 \approx 0{,}754$ m^3 (zaniża o ok. 2%).

Sprawdź. T1: $x^4 - 3\ln|x| + \frac{1}{2}e^{2x} + C$; T2: $x \in [-1;2]$, $P = \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2)\,dx = \frac{9}{2}$; T3: $V = 5 \cdot \frac{\pi(0{,}0225+0{,}01)}{2} \approx 0{,}255$ m^3; $r^2\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{0{,}0225+0{,}01}{2} = 0{,}01625$, $d_m \approx 0{,}255$ m $= 25{,}5$ cm.