

Ćwiczenia 4

Granica i ciągłość funkcji, asymptoty

Obliczanie granic funkcji • granice jednostronne • ciągłość • asymptoty pionowe, poziome i ukośne. Czas: 2 h. Materiał teoretyczny: streszczenie wykładu 4.

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka • Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

Przypomnienie

$\left[\frac{0}{0}\right]$ – rozkładamy na czynniki i skracamy lub usuwamy niewymierność; $\left[\frac{\text{liczba}}{0}\right]$ – liczymy granice jednostronne; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$.

Asymptoty: pionowa $x = x_0$, gdy $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = \pm\infty$; ukośna $y = ax + b$, $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax]$ (dla $a = 0$ – pozioma).

Zadania na ćwiczenia

Zadanie 1. Oblicz granice funkcji w nieskończoności:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 2x^2 - x - 1}{5x^3 + x - 4}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2}{x^2 + 3x + 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 5x + 6}{x - 7}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + x - 3x^3}{1 + x^2 + 3x^3}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + 5x - 2} - 2x)$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$

Zadanie 2. Oblicz granice funkcji w punkcie (jeśli trzeba – jednostronne):

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4}{x + 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{2x - 6}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$

d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 25} \frac{\sqrt{x} - 5}{x - 25}$

g) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x - 2}$

h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 - x}$

i) ★ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x + 1}}{1 - \sqrt{x + 1}}$

Zadanie 3. Oblicz granice, korzystając z granic podstawowych wyrażeń nieoznaczonych:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{4x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{4x}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$

Zadanie 4. Zbadaj ciągłość funkcji:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x - 5}, & x \neq 5 \\ 5, & x = 5 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 3, & x < -3 \\ -x, & -3 \leq x \leq 3 \\ -3, & x > 3 \end{cases}$

Zadanie 5. Wyznacz asymptoty pionowe, poziome i ukośne funkcji (o ile istnieją):

a) $f(x) = \frac{x}{1-x}$

b) $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

d) $f(x) = \frac{x^3 + 8}{x^2 - 4}$

e) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x + 4}$

f) ★ $f(x) = x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right)$

🏠 Zadania do pracy samodzielnej

Zadanie S1. Oblicz granice:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{x + 3}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2 - 1}$

e) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + x - 6}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}$

g) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{x}, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x}$

i) ★ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x}$

Zadanie S2. Wyznacz asymptoty funkcji:

a) $\frac{x+2}{1-x}$

b) $\frac{2x+1}{x^2}$

c) $\frac{x^2+2x}{x-2}$

d) $\frac{x^3}{x^2-1}$

Zadanie S3. Dobierz parametr a tak, aby funkcja $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ a, & x = 2 \end{cases}$ była ciągła.

📌 Sprawdź, co umiesz (ok. 20 minut)

Zadanie T1. Oblicz: a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$, b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-x}{5-3x^2}$.

Zadanie T2. Oblicz granice jednostronne funkcji $f(x) = \frac{1}{x-3}$ w punkcie $x = 3$.

Zadanie T3. Wyznacz wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$.

Odpowiedzi

Zad. 1. a) $\frac{3}{5}$; b) 0; c) $-\infty$; d) -1; e) $\frac{5}{4}$; f) $\frac{1}{2}$.

Zad. 2. a) 2; b) 1; c) 2; d) $-\frac{2}{5}$; e) 0; f) $\frac{1}{10}$; g) $\lim_{x \rightarrow 2^-} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} = +\infty$ – granica nie istnieje; h) $\lim_{x \rightarrow 1^-} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} = -\infty$; i) 1.

Zad. 3. a) $\frac{3}{4}$; b) $\frac{1}{4}$; c) 1 (bo $\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x = \left[\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right]^{1/x} \rightarrow e^0$); d) e^3 .

Zad. 4. a) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 10 \neq f(5) = 5$ – nieciągła w $x = 5$; b) ciągła na $\mathbb{R}$; c) ciągła na $\mathbb{R}$ (w $x = \pm 3$ granice jednostronne równe wartości).

Zad. 5. a) pionowa $x = 1$ (obustronna), pozioma $y = -1$ w $\pm\infty$; b) pionowa $x = 0$, pozioma $y = 0$ w $\pm\infty$; c) brak pionowych, ukośne: $y = x$ w $+\infty$, $y = -x$ w $-\infty$; d) pionowa $x = 2$ ($x = -2$ – tylko „dziura”: $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -3$), ukośna $y = x$; e) pionowa $x = -2$, ukośna $y = \frac{1}{2}x - 1$; f) pionowa lewostronna $x = -\frac{1}{e}$, ukośna $y = x + \frac{1}{e}$.

Zad. S1. a) 0; b) $\frac{1}{2}$; c) -1; d) $\frac{1}{2}$; e) $\frac{6}{5}$; f) $\frac{5}{2}$; g) 4; h) $-\infty$, $+\infty$; i) $\frac{\sqrt{2}}{8}$.

Zad. S2. a) $x = 1$, $y = -1$; b) $x = 0$, $y = 0$; c) $x = 2$, $y = x + 4$; d) $x = -1$, $x = 1$, $y = x$.

Zad. S3. $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$, $a = 4$.

Sprawdź. T1: a) $\frac{3}{2}$, b) $-\frac{2}{3}$; T2: $-\infty$ i $+\infty$; T3: pionowa $x = 1$, ukośna $y = x + 1$, brak poziomej.