

Ćwiczenia 5

Całka nieoznaczona. Metody całkowania

Całkowanie wprost • całkowanie przez podstawienie • całkowanie przez części •

zastosowania: od tempa zmian do wielkości. Materiał teoretyczny: streszczenie wykładu 5.

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka • Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

Przypomnienie

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ($n \neq -1$), $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$, $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$;
podstawienie: $\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(t) dt$, $t = g(x)$; przez części: $\int f g' dx = f g - \int f' g dx$.
Każdy wynik sprawdzamy przez różniczkowanie.

Zadania na ćwiczenia

Zadanie 1. Oblicz całki (całkowanie wprost, potęgi):

- | | | |
|---|--|---|
| a) $\int \sqrt{x} dx$ | b) $\int \frac{1}{x^2} dx$ | c) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ |
| d) $\int \left(\frac{5}{x^3} - 2x^2 \right) dx$ | e) $\int (x-3)(x+6)(x-2) dx$ | f) $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1) dx$ |
| g) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx$ | h) $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx$ | |

Zadanie 2. Oblicz całki (całkowanie wprost, funkcje elementarne):

- | | |
|---|---|
| a) $\int \left(\frac{2}{x} - 3x^2\sqrt{x} + \frac{5x}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$ | b) $\int (5 \sin x + 7 \cos x) dx$ |
| c) $\int 10^x dx$ | d) $\int \left(\frac{-9}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sin^2 x} + 4 \cos x + \frac{5}{1+x^2} \right) dx$ |
| e) $\int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx$ | f) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$ |

Zadanie 3. Oblicz całki, upraszczając najpierw funkcję podcałkową:

- | | | |
|--|-------------------------------------|--|
| a) $\int \frac{x^2 + 7x + 12}{x+4} dx$ | b) $\int \frac{4-x}{2+\sqrt{x}} dx$ | c) $\int \frac{1+3x^2}{x^2(1+x^2)} dx$ |
|--|-------------------------------------|--|

Zadanie 4. Oblicz całki metodą podstawienia:

- | | | |
|------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| a) $\int x e^{x^2} dx$ | b) $\int (2x+3)^5 dx$ | c) $\int e^{3x-1} dx$ |
| d) $\int \frac{x}{x^2+1} dx$ | e) $\int \sin^3 x \cos x dx$ | f) $\int \frac{dx}{x \ln x}$ |
| g) $\int x \sqrt{x^2+4} dx$ | h) $\int \operatorname{tg} x dx$ | i) ★ $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$ |

Zadanie 5. Oblicz całki metodą przez części:

a) $\int x \cos x \, dx$

b) $\int x \ln x \, dx$

c) $\int (2x+1)e^{-x} \, dx$

d) $\int x^2 e^x \, dx$

e) ★ $\int \arctg x \, dx$

Zadanie 6. (stężenie) Po uruchomieniu oczyszczalni stężenie zawiesiny w odpływie maleje w tempie $c'(t) = -3e^{-0.2t}$ [mg/(l·dobę)], t – doby. Na początku $c(0) = 20$ mg/l. Wyznacz $c(t)$. Do jakiej wartości dąży stężenie po długim czasie?

Zadanie 7. (populacja) Tempo wzrostu populacji bobrów w parku narodowym wynosi $N'(t) = 40 + 4t$ osobników na rok, a na początku obserwacji było ich 300. Wyznacz $N(t)$ i oblicz liczebność po 10 latach.

🏠 Zadania do pracy samodzielnej

Zadanie S1. Oblicz całki:

a) $\int \frac{x^2-1}{x} \, dx$

b) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x} \, dx$

c) $\int \frac{x^3+1}{x+1} \, dx$

d) $\int \frac{dx}{3x-2}$

e) $\int \frac{x^2}{x^3+1} \, dx$

f) $\int \sin x \cos^2 x \, dx$

g) $\int x e^{-2x} \, dx$

h) $\int x^2 \ln x \, dx$

i) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$

j) $\int x \sin 2x \, dx$

k) $\int \frac{e^x}{e^x+2} \, dx$

l) $\int x^2 e^{x^3} \, dx$

Zadanie S2. (emisja) Natężenie emisji pyłu z zakładu rośnie w tempie $e'(t) = 0,6t$ [t/rok²], a obecnie wynosi $e(0) = 12$ t/rok. Wyznacz $e(t)$ i natężenie emisji po 5 latach.

Zadanie S3. Znajdź funkcję F , której pochodna jest równa $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ i której wykres przechodzi przez punkt $(1; 4)$.

📝 Sprawdź, co umiesz (ok. 25 minut)

Zadanie T1. Oblicz $\int \left(x^3 - \frac{4}{x} + 3\sqrt{x} \right) dx$.

Zadanie T2. Oblicz $\int x \cos(x^2) \, dx$.

Zadanie T3. Oblicz $\int x e^{2x} \, dx$.

Zadanie T4. Oblicz $\int \frac{2x+1}{x^2+x+5} \, dx$.

Odpowiedzi

Zad. 1. a) $\frac{2}{3}x^{3/2} + C$; b) $-\frac{1}{x} + C$; c) $\sqrt{x} + C$; d) $-\frac{5}{2x^2} - \frac{2}{3}x^3 + C$; e) $\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 12x^2 + 36x + C$; f) $(\sqrt{x})^3 + 1 = x^{3/2} + 1$, $\frac{2}{5}x^{5/2} + x + C$; g) $\frac{6}{7}x^{7/6} - \frac{4}{3}x^{3/4} + C$; h) $-\frac{2}{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x} + \frac{2}{3}x^{3/2} + C$.

Zad. 2. a) $2 \ln |x| - \frac{6}{7}x^{7/2} + 3x^{5/3} + C$; b) $-5 \cos x + 7 \sin x + C$; c) $\frac{10^x}{\ln 10} + C$; d) $-9 \arcsin x - \operatorname{ctg} x + 4 \sin x + 5 \operatorname{arctg} x + C$; e) $\frac{2 \sin x \cos x}{\cos x} = 2 \sin x$, $-2 \cos x + C$; f) $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, $\operatorname{tg} x - x + C$.

Zad. 3. a) $\frac{(x+3)(x+4)}{x+4} = x+3$, $\frac{x^2}{2} + 3x + C$; b) $\frac{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}{2+\sqrt{x}} = 2 - \sqrt{x}$, $2x - \frac{2}{3}x^{3/2} + C$; c) $\frac{1}{x^2} + \frac{2}{1+x^2}$, $-\frac{1}{x} + 2 \operatorname{arctg} x + C$.

Zad. 4. a) $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$; b) $\frac{(2x+3)^6}{12} + C$; c) $\frac{1}{3}e^{3x-1} + C$; d) $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$; e) $\frac{1}{4} \sin^4 x + C$; f) $\ln |\ln x| + C$; g) $\frac{1}{3}(x^2 + 4)^{3/2} + C$; h) $-\ln |\cos x| + C$; i) $\frac{1}{3} \ln^3 x + C$.

Zad. 5. a) $x \sin x + \cos x + C$; b) $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$; c) $-(2x+3)e^{-x} + C$; d) $e^x(x^2 - 2x + 2) + C$ (dwukrotnie przez części); e) $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$ ($f = \operatorname{arctg} x$, $g' = 1$).

Zad. 6. $c(t) = \int -3e^{-0,2t} dt = 15e^{-0,2t} + C$; $c(0) = 20 \Rightarrow C = 5$; $c(t) = 15e^{-0,2t} + 5$; $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 5 \text{ mg/l}$.

Zad. 7. $N(t) = 2t^2 + 40t + C$, $C = 300$; $N(10) = 200 + 400 + 300 = 900$ osobników.

Zad. S1. a) $\frac{x^2}{2} - \ln |x| + C$; b) $x - 4\sqrt{x} + \ln x + C$; c) $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + C$; d) $\frac{1}{3} \ln |3x - 2| + C$; e) $\frac{1}{3} \ln |x^3 + 1| + C$; f) $-\frac{1}{3} \cos^3 x + C$; g) $-\frac{1}{4}(2x+1)e^{-2x} + C$; h) $\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C$; i) $2e^{\sqrt{x}} + C$; j) $-\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$; k) $\ln(e^x + 2) + C$; l) $\frac{1}{3}e^{x^3} + C$.

Zad. S2. $e(t) = 0,3t^2 + 12$; $e(5) = 19,5 \text{ t/rok}$.

Zad. S3. $F(x) = x^3 - x^2 + x + C$, $F(1) = 1 + C = 4$, $F(x) = x^3 - x^2 + x + 3$.

Sprawdź. T1: $\frac{x^4}{4} - 4 \ln |x| + 2x^{3/2} + C$; T2: $\frac{1}{2} \sin(x^2) + C$; T3: $\frac{1}{4}(2x-1)e^{2x} + C$; T4: $\ln(x^2 + x + 5) + C$.