MATEMATYKA • Technologia Drewna (studia niestacjonarne) • zestaw zadań

Ćwiczenia 5 • 6.12.2026 • 3 h

Wektory i macierze

Współrzędne i działania na wektorach • norma, wersor • iloczyn skalarny, kąt, prostopadłość • działania na macierzach, transpozycja, ślad • mnożenie macierzy • równania macierzowe. Materiał teoretyczny: streszczenie wykładów 7–8.

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka • Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

Przypomnienie

$\overrightarrow{AB} = [b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n]$; $\mathbf{a} \pm \mathbf{b}$, $k\mathbf{a}$ – po współrzędnych; $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$; $\mathbf{a}^0 = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a}$.

$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$; $\cos\alpha = \frac{\mathbf{a}\circ\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|}$; $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \iff \mathbf{a} \circ \mathbf{b} = 0$; praca $W = \mathbf{F} \circ \mathbf{s}$.

$A \pm B$, cA – element po elemencie (ten sam wymiar); A^T – wiersze $\leftrightarrow$ kolumny;
$2A + X = B \Rightarrow X = B - 2A$.

AB: $c_{ij} = (i\text{-ty wiersz } A) \circ (j\text{-ta kolumna } B)$; $(m \times n)(n \times p) = m \times p$; na ogół $AB \neq BA$.

Zadania na ćwiczenia

Zadanie 1. Wyznacz współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ i jego długość:

a) $A = (2, 1)$, $B = (5, 5)$ **b)** $A = (-1, 4)$, $B = (4, -8)$ **c)** $A = (1, -2, 0)$, $B = (3, -1, 2)$

Zadanie 2. Dla wektorów $\mathbf{u} = [1, -2, 2]$ i $\mathbf{v} = [3, 0, -4]$ oblicz:

a) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ **b)** $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ **c)** $3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$ **d)** $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$

e) $\mathbf{u} \circ \mathbf{v}$ **f)** $\cos\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ **g)** wersor $\mathbf{u}^0$ **h)** ★ $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$

Zadanie 3. Oblicz kąt między wektorami:

a) $[1, 3]$ i $[2, 1]$ **b)** $[1, 1, 0]$ i $[0, 1, 1]$ **c)** $[2, -1]$ i $[3, 6]$ **d)** $[1, 0]$ i $[-1, 1]$

e) Dla jakiej wartości m wektory $\mathbf{a} = [m, 2, -1]$ i $\mathbf{b} = [4, m, 6]$ są prostopadłe?

Zadanie 4. (siły) Kłodę przeciągają dwie liny. Siły (oś x – kierunek przeciągania, oś y – poprzecznie, w niutonach) wynoszą $\mathbf{F}_1 = [300, 400]$ i $\mathbf{F}_2 = [500, -400]$.

a) Wyznacz siłę wypadkową $\mathbf{F}$ i jej wartość $\|\mathbf{F}\|$. Oblicz też $\|\mathbf{F}_1\|$ i $\|\mathbf{F}_2\|$. Czy $\|\mathbf{F}\| = \|\mathbf{F}_1\| + \|\mathbf{F}_2\|$?

b) Kłoda przesunęła się o $\mathbf{s} = [15, 0]$ m. Oblicz pracę $W = \mathbf{F} \circ \mathbf{s}$ siły wypadkowej oraz pracę samej siły $\mathbf{F}_1$.

c) Pod jakim kątem do kierunku przeciągania jest napięta pierwsza lina?

Zadanie 5. (koszt) Do wykonania regału potrzeba $\mathbf{q} = [3;\ 10;\ 16;\ 0{,}5]$ (m^2 płyty, m obrzeża, szt. okuć, l lakieru). Ceny jednostkowe wynoszą $\mathbf{c} = [60;\ 3;\ 4;\ 40]$ (zł/m^2, zł/m, zł/szt., zł/l; wartości przykładowe).

a) Oblicz koszt materiałów na jeden regał jako iloczyn skalarny $\mathbf{q} \circ \mathbf{c}$.

b) O ile wzrośnie ten koszt, jeżeli cena płyty wzrośnie o 10%?

Zadanie 6. Dane są macierze $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. Oblicz (o ile to możliwe):

a) $A + B$ **b)** $A - B$ **c)** $3A - 2B$ **d)** $A + C$

e) A^T **f)** $(A + B)^T$ **g)** $\operatorname{tr} C$ **h)** $C + C^T$

Zadanie 7. Dla macierzy z zadania 6 sprawdź, które iloczyny są wykonalne, i oblicz je:

a) AB^T **b)** CA **c)** AC **d)** C^2 **e)** $A^T C$

f) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ oraz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ oraz $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Zadanie 8. Wyznacz macierz X, jeżeli $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$:

a) $2A + X = B$ **b)** $X - 3I = A$ **c)** $B - 2X = A$

Zadanie 9. (produkcja) Produkcję [szt.] stołów, szafek i regałów (kolumny) w dwóch zakładach (wiersze) w październiku i listopadzie opisują macierze $P_X = \begin{bmatrix} 30 & 18 & 24 \\ 26 & 15 & 32 \end{bmatrix}$, $P_{XI} = \begin{bmatrix} 34 & 22 & 20 \\ 30 & 17 & 28 \end{bmatrix}$. Oblicz łączną produkcję w obu miesiącach, zmianę produkcji $P_{XI} - P_X$ oraz średnią miesięczną produkcję. Zinterpretuj wyniki.

Zadanie 10. (normy zużycia) Normy zużycia materiałów na jeden wyrób zawiera macierz N (wiersze: płyta [m^2], obrzeże [m], okucia [szt.]; kolumny: stół, szafka, regał), a ceny – wektor $\mathbf{c}$:

$$N = \begin{bmatrix} 1{,}5 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 10 \\ 8 & 12 & 16 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 60 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{zł/m}^2 \\ \text{zł/m} \\ \text{zł/szt.} \end{matrix}$$

a) Zakład planuje wykonać 10 stołów, 20 szafek i 5 regałów. Zapisz wektor planu $\mathbf{p}$ i oblicz zapotrzebowanie na materiały $N\mathbf{p}$.

b) Oblicz $N^T\mathbf{c}$ – koszt materiałów na jeden wyrób każdego rodzaju.

c) Oblicz koszt materiałów na cały plan na dwa sposoby: $\mathbf{c} \circ (N\mathbf{p})$ oraz $\mathbf{p} \circ (N^T\mathbf{c})$.

Zadania do pracy samodzielnej

Zadanie S1. Dla $\mathbf{u} = [4, 0, -3]$ i $\mathbf{v} = [2, 1, 2]$ oblicz $2\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$, $\mathbf{u} \circ \mathbf{v}$ i cosinus kąta między wektorami.

Zadanie S2. Oblicz AB i BA dla $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Czy $AB = BA$? Wyznacz X z równania $2X + A = B$.

Zadanie S3. (koszt) Zużycie materiałów (kolumny: płyta [m^2], obrzeże [m], okucia [szt.]) na komodę i biurko (wiersze) opisuje macierz $M = \begin{bmatrix} 2{,}5 & 9 & 14 \\ 2 & 6 & 10 \end{bmatrix}$. Przy cenach $\mathbf{c} = [60, 3, 4]^T$ oblicz $M\mathbf{c}$. Ile kosztują materiały na 8 komód i 12 biurek?

Sprawdź, co umiesz (ok. 20 minut)

Zadanie T1. Wyznacz współrzędne i długość wektora $\overrightarrow{AB}$ dla $A = (3, -1, 2)$, $B = (5, 1, 3)$.

Zadanie T2. Dla $\mathbf{u} = [2, -1, 1]$ i $\mathbf{v} = [1, 3, 1]$ oblicz $\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$ oraz $\mathbf{u} \circ \mathbf{v}$. Czy wektory są prostopadłe?

Zadanie T3. Dla $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ oblicz AB i wyznacz X z równania $2A + X = B$.

Odpowiedzi

Zad. 1. a) $[3,4]$, 5; b) $[5,-12]$, 13; c) $[2,1,2]$, 3.

Zad. 2. a) $[4,-2,-2]$; b) $[-2,-2,6]$; c) $[-3,-6,14]$; d) $\|\mathbf{u}\|=3$, $\|\mathbf{v}\|=5$; e) $3+0-8=-5$; f) $\frac{-5}{3\cdot 5}=-\frac{1}{3}$ (kąt rozwarty); g) $\left[\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right]$; h) 44 $(=9-2\cdot(-5)+25)$.

Zad. 3. a) $\cos\alpha=\frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha=45°$; b) $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, $\alpha=60°$; c) iloczyn $=0$, $\alpha=90°$; d) $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha=135°$; e) $4m+2m-6=0$, $m=1$.

Zad. 4. a) $\mathbf{F}=[800,0]$, $\|\mathbf{F}\|=800$ N; $\|\mathbf{F}_1\|=500$ N, $\|\mathbf{F}_2\|=\sqrt{410\,000}=100\sqrt{41}\approx 640{,}3$ N; nie: $800<1140{,}3$; b) $W=800\cdot 15=12\,000$ J $=12$ kJ; $W_1=300\cdot 15=4500$ J; c) $\cos\alpha=\frac{300}{500}=0{,}6$, $\alpha\approx 53{,}1°$.

Zad. 5. a) $3\cdot 60+10\cdot 3+16\cdot 4+0{,}5\cdot 40=180+30+64+20=294$ zł; b) cena płyty 66 zł/m^2: koszt 312 zł, wzrost o 18 zł.

Zad. 6. a) $\begin{bmatrix}3&3&-3\\1&1&3\end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix}1&-5&3\\1&5&-7\end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix}4&-11&6\\3&13&-16\end{bmatrix}$; d) niewykonalne (różne wymiary); e) $\begin{bmatrix}2&1\\-1&3\\0&-2\end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix}3&1\\3&1\\-3&3\end{bmatrix}$; g) 5; h) $\begin{bmatrix}4&0\\0&6\end{bmatrix}$.

Zad. 7. a) $\begin{bmatrix}-2&2\\19&-16\end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix}5&1&-2\\1&10&-6\end{bmatrix}$; c) niewykonalne ($2\times 3$ i 2×2); d) $\begin{bmatrix}3&5\\-5&8\end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix}3&5\\-5&8\\2&-6\end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix}6&2\\11&6\end{bmatrix}$ oraz $\begin{bmatrix}2&1\\6&10\end{bmatrix}$; g) $[-1]$ oraz $\begin{bmatrix}2&4&6\\0&0&0\\-1&-2&-3\end{bmatrix}$.

Zad. 8. a) $X=B-2A=\begin{bmatrix}1&1\\2&3\end{bmatrix}$; b) $X=A+3I=\begin{bmatrix}5&1\\0&2\end{bmatrix}$; c) $X=\frac{1}{2}(B-A)=\begin{bmatrix}1{,}5&1\\1&1\end{bmatrix}$.

Zad. 9. $P_X+P_{XI}=\begin{bmatrix}64&40&44\\56&32&60\end{bmatrix}$; $P_{XI}-P_X=\begin{bmatrix}4&4&-4\\4&2&-4\end{bmatrix}$ – więcej stołów i szafek, o 4 regały mniej w każdym zakładzie; średnia $\begin{bmatrix}32&20&22\\28&16&30\end{bmatrix}$.

Zad. 10. a) $\mathbf{p}=[10,20,5]^T$, $N\mathbf{p}=[70;\ 270;\ 400]^T$: 70 m^2 płyty, 270 m obrzeża, 400 okuć; b) $N^T\mathbf{c}=[140;\ 192;\ 274]^T$ zł (stół, szafka, regał); c) $60\cdot 70+3\cdot 270+4\cdot 400=6610$ zł $=10\cdot 140+20\cdot 192+5\cdot 274$.

Zad. S1. $[6,-1,-8]$; 5; 3; $8+0-6=2$; $\cos\alpha=\frac{2}{15}$.

Zad. S2. $AB=\begin{bmatrix}5&4\\-3&0\end{bmatrix}$, $BA=\begin{bmatrix}3&6\\-1&2\end{bmatrix}$ – nie; $X=\frac{1}{2}(B-A)=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$.

Zad. S3. $M\mathbf{c}=[233;\ 178]^T$ zł (komoda, biurko); $[8,12]\circ[233,178]=1864+2136=4000$ zł.

Sprawdź. T1: $[2,2,1]$, długość 3; T2: $\mathbf{u}+2\mathbf{v}=[4,5,3]$, $\mathbf{u}\circ\mathbf{v}=2-3+1=0$ – tak, są prostopadłe; T3: $AB=\begin{bmatrix}7&9\\-2&-4\end{bmatrix}$, $X=B-2A=\begin{bmatrix}1&-3\\2&6\end{bmatrix}$.