

Ćwiczenia 5

Rachunek różniczkowy – pochodna funkcji

Pochodna z definicji • pochodne funkcji potęgowych • pochodna sumy, iloczynu i ilorazu • pochodne funkcji elementarnych. Czas: 2 h. Materiał teoretyczny: streszczenie wykładu 5.

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka • Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

Przypomnienie

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}; \quad (x^k)' = kx^{k-1}; \quad (f \pm g)' = f' \pm g'; \quad (fg)' = f'g + fg'; \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Pierwiastki i ułamki zamieniamy na potęgi: $\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$, $\frac{1}{x^m} = x^{-m}$.

Zadania na ćwiczenia

Zadanie 1. Korzystając z definicji pochodnej funkcji w punkcie, wyznacz pochodne funkcji:

a) $f(x) = 4x^2 + 7x$ w punkcie $x_0 = -1$

b) $f(x) = x - \frac{1}{x}$ w punkcie $x_0 = 1$

c) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - 3$ w punkcie $x_0 = 0$

d) ★ $f(x) = \sqrt[3]{x}$ w punkcie $x_0 = 1$ (wsk. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$)

Zadanie 2. Uzupełnij tabelę pochodnych funkcji elementarnych (bez zaglądania do notatek!) dla funkcji: c , x , x^k , $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, a^x , e^x , $\log_a x$, $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$.

Zadanie 3. Oblicz pochodne funkcji potęgowych:

a) $y = 4x^2 - 8x + 9600$

b) $y = 10x^4 - 4x^{-2} + 9x^{-11}$

c) $y = \frac{4}{x^3}$

d) $y = \left(\frac{2}{x^2}\right)^5$

e) $y = \sqrt{x} + 2x^2$

f) $y = 8\sqrt[3]{x^7}$

g) $y = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \sqrt[5]{x}$

h) $y = \frac{5x}{\sqrt[3]{x}}$

i) $y = \frac{2}{x\sqrt{x}} + \frac{5}{\sqrt[3]{x}}$

Zadanie 4. Oblicz pochodne, korzystając z reguł dla iloczynu i ilorazu:

a) $y = (2x + 8)(4 + x^4)$

b) $y = \sin x \cos x$

c) $y = x \ln x$

d) $y = x \sin x + 1 + \operatorname{tg} x$

e) $y = \cos x \cdot \operatorname{tg} x$

f) $y = e^x \ln x$

g) $y = \frac{4x - 9}{6x^2 - x + 10}$

h) $y = (x + 1)(2x^2 + 2)(3x - 2)$

i) $y = \frac{2\sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[3]{x}}$

j) ★ $y = \frac{2\sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}$

 Zadania do pracy samodzielnej

Zadanie S1. Korzystając z definicji, wyznacz pochodną funkcji $f(x) = x^2 - 3x$ w punkcie $x_0 = 2$.

Zadanie S2. Oblicz pochodne funkcji:

a) $y = \frac{x}{4x^4} + 3$

b) $y = \frac{x^3 - 2x}{x}$

c) $y = \sqrt{x}(x - 1)$

d) $y = \frac{1-x}{1+x}$

e) $y = \frac{x+1}{x+3}(x^2 - 2x - 1)$

f) $y = (x+1)\left(x+1 - \frac{1}{x+2}\right)$

g) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}$

h) $y = \frac{1}{x + x^2 + x^3 + x^4}$

i) ★ $y = \frac{x^5}{(x^2 + 1)(x^3 + 4)}$

 Sprawdź, co umiesz (ok. 20 minut)

Zadanie T1. Oblicz pochodne: a) $y = 3x^4 - 2\sqrt{x} + \frac{5}{x}$, b) $y = (x^2 + 1)e^x$.

Zadanie T2. Oblicz pochodne: a) $y = \frac{2x-1}{x+3}$, b) $y = x^2 \ln x$.

Zadanie T3. Korzystając z definicji, oblicz $f'(1)$ dla $f(x) = 2x^2 + x$.

Odpowiedzi

Zad. 1. a) $f'(-1) = -1$; b) $f'(1) = 2$; c) $f'(0) = 2$; d) $f'(1) = \frac{1}{3}$.

Zad. 2. Zob. tabela w streszczeniu wykładu 5.

Zad. 3. a) $8x - 8$; b) $40x^3 + 8x^{-3} - 99x^{-12}$; c) $-\frac{12}{x^4}$; d) $-\frac{320}{x^{11}}$; e) $\frac{1}{2\sqrt{x}} + 4x$; f) $\frac{56}{5}x^{2/5}$; g) $-\frac{4}{3}x^{-5/3} - \frac{1}{5}x^{-4/5}$; h) $\frac{10}{3}x^{-1/3}$; i) $-3x^{-5/2} - \frac{5}{7}x^{-8/7}$.

Zad. 4. a) $10x^4 + 32x^3 + 8$; b) $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$; c) $\ln x + 1$; d) $\sin x + x \cos x + \frac{1}{\cos^2 x}$; e) $\cos x$ (bo $\cos x \operatorname{tg} x = \sin x$); f) $e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right)$; g) $\frac{-24x^2 + 108x + 31}{(6x^2 - x + 10)^2}$; h) $24x^3 + 6x^2 + 4x + 2$; i) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}(1 - \sqrt[3]{x})^2}$; j) $-\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$ (wsk.: najpierw skrócić przez $\sqrt{x}$).

Zad. S1. $f'(2) = 1$.

Zad. S2. a) $-\frac{3}{4x^4}$; b) $2x$; c) $\frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$; d) $-\frac{2}{(1+x)^2}$; e) $\frac{2(x^3+4x^2-3x-4)}{(x+3)^2}$; f) $\frac{2x^3+10x^2+16x+7}{(x+2)^2}$; g) $-\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4} - \frac{4}{x^5}$; h) $-\frac{1+2x+3x^2+4x^3}{(x+x^2+x^3+x^4)^2}$; i) $\frac{2x^4(x^3+6x^2+10)}{(x^2+1)^2(x^3+4)^2}$.

Sprawdź. T1: a) $12x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{5}{x^2}$, b) $e^x(x+1)^2$; T2: a) $\frac{7}{(x+3)^2}$, b) $2x \ln x + x$; T3: $f'(1) = 5$.