

Ćwiczenia 6

Całka oznaczona i jej zastosowania

Twierdzenie Newtona–Leibniza • podstawienie i całkowanie przez części w całce oznaczonej • pola obszarów • wartość średnia • zastosowania: ładunek, opad, średnia temperatura. Materiał teoretyczny: streszczenie wykładu 6.

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka • Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

Przypomnienie

$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$; podstawienie: $\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt$ (zmieniamy granice!);

przez części: $\int_a^b f g' dx = [f g]_a^b - \int_a^b f' g dx$; f nieparzysta: $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$;

pole: $P = \int_a^b |f(x)| dx$, $P = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx$ ($f \leq g$); średnia: $f_{sr} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$; wielkość całkowa: $Q = \int_{t_1}^{t_2} q(t) dt$.

Zadania na ćwiczenia

Zadanie 1. Oblicz całki, korzystając z twierdzenia Newtona–Leibniza:

a) $\int_0^2 (3x^2 - 4x + 1) dx$

b) $\int_1^4 \sqrt{x} dx$

c) $\int_0^{\pi/2} \cos x dx$

d) $\int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right) dx$

e) $\int_0^1 e^{2x} dx$

f) $\int_{-1}^1 (x^3 + 5x) dx$

Zadanie 2. Oblicz całki (podstawienie, całkowanie przez części, własności):

a) $\int_0^1 x e^x dx$

b) $\int_0^1 \frac{x-1}{x+1} dx$

c) $\int_1^e x^2 \ln x dx$

d) $\int_0^{\sqrt{5}} \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} dx$

Zadanie 3. Wykonaj rysunek i oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi:

a) $y = x^2 - 2x - 8$, $y = 0$

b) $y = -x^2 + 2x + 3$, $y = 0$

c) $y = (x-1)^2 - 1$, $y = 3x$

d) $y = -x^2 - 2x$, $y = x^2 + 4x$

e) $y = x^2$, $y^2 = x$

f) ★ $4y = x^2$, $y = \frac{8}{x^2 + 4}$

Zadanie 4. (ładunek) Ładunek zawieszony odprowadzanej z zakładu w ciągu zmiany roboczej rośnie liniowo: $q(t) = 3 + 0,5t$ [kg/h], $t \in \langle 0; 8 \rangle$. Oblicz masę zawieszony odprowadzonej w ciągu zmiany oraz średni ładunek godzinowy.

Zadanie 5. (temperatura) Średnią temperaturę powietrza w ciągu roku opisuje funkcja $T(t) = 9 + 10 \sin \frac{\pi(t-4)}{6}$ [°C], $t \in \langle 0; 12 \rangle$ – miesiące. Oblicz średnią temperaturę w całym roku oraz w okresie wegetacyjnym $t \in \langle 4; 10 \rangle$.

Zadanie 6. (opad) ★ Intensywność opadu podczas ulewy wynosi $i(t) = 12t e^{-2t}$ [mm/h], t – godziny. Oblicz sumę opadu w ciągu pierwszych 2 godzin.

🏠 Zadania do pracy samodzielnej

Zadanie S1. Oblicz całki:

a) $\int_0^1 (x^2 + 1)^2 dx$

b) $\int_0^\pi \sin x \cos x dx$

c) $\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx$

d) $\int_1^e \ln x dx$

e) $\int_0^\pi x \sin x dx$

f) $\int_0^1 x e^{x^2} dx$

Zadanie S2. Wykonaj rysunek i oblicz pole obszaru:

- a) trójkąta o wierzchołkach $A(1, 0)$, $B(0, 0)$, $C(1, 1)$ (za pomocą całki)
- b) ograniczonego prostymi $y = 2x$, $y = 0$, $y = -2x + 2$
- c) ograniczonego krzywą $y = \sin x$ i osią Ox dla $x \in [0, 2\pi]$
- d) ★ ograniczonego krzywymi $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = 3x$

Zadanie S3. (emisja) Emisja CO_2 z elektrociepłowni po modernizacji maleje: $e(t) = 50 - 2t$ [tys. t/rok], t – lata. Oblicz łączną emisję w ciągu 10 lat.

Zadanie S4. Oblicz średnią wartość funkcji $f(x) = x^2$ na przedziale $\langle 0; 3 \rangle$ i zaznacz ją na rysunku.

📝 Sprawdź, co umiesz (ok. 25 minut)

Zadanie T1. Oblicz $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) dx$.

Zadanie T2. Oblicz $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx$.

Zadanie T3. Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi $y = x^2$ i $y = x + 2$.

Zadanie T4. Stężenie azotanów w rzece w ciągu 10 dób rośnie liniowo: $c(t) = 4 + 0,6t$ [mg/l]. Oblicz średnie stężenie w tym okresie.

 Odpowiedzi

Zad. 1. a) 2; b) $\frac{14}{3}$; c) 1; d) $\frac{e^2+1}{2}$; e) $\frac{e^2-1}{2}$; f) 0 (funkcja nieparzysta).

Zad. 2. a) 1 (przez części); b) $\frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$, $1 - 2 \ln 2$; c) $\frac{2e^3+1}{9}$; d) $t = 4 + x^2$, 1.

Zad. 3. a) $x \in [-2, 4]$, 36; b) $x \in [-1, 3]$, $\frac{32}{3}$; c) $x \in [0, 5]$, $\frac{125}{6}$; d) $x \in [-3, 0]$, 9; e) $x \in [0, 1]$, $\frac{1}{3}$; f) $x \in [-2, 2]$, $2\pi - \frac{4}{3} \approx 4,95$.

Zad. 4. $Q = \int_0^8 (3 + 0,5t) dt = 24 + 16 = 40$ kg; średnio 5 kg/h.

Zad. 5. cały rok: 9°C (całka z sinusa po pełnym okresie jest równa 0); okres wegetacyjny: $9 + \frac{1}{6} \cdot \frac{120}{\pi} = 9 + \frac{20}{\pi} \approx 15,4^\circ\text{C}$.

Zad. 6. przez części: $\int t e^{-2t} dt = -\frac{1}{4}(2t+1)e^{-2t} + C$; $P = 12 \cdot \frac{1}{4}(1 - 5e^{-4}) = 3 - 15e^{-4} \approx 2,73$ mm.

Zad. S1. a) $\frac{28}{13}$; b) 0; c) $\frac{1}{2} \ln 2$; d) 1; e) π ; f) $t = x^2$, $\frac{e-1}{2}$.

Zad. S2. a) $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{2}$; c) 4; d) $\int_0^3 \frac{1}{2} x^2 dx + \int_3^6 (3x - \frac{1}{2} x^2) dx = \frac{9}{2} + 9 = \frac{27}{2}$.

Zad. S3. $\int_0^{10} (50 - 2t) dt = 500 - 100 = 400$ tys. t.

Zad. S4. $f_{\text{sr}} = \frac{1}{3} \int_0^3 x^2 dx = 3$.

Sprawdź. T1: $\frac{17}{6}$; T2: $t = \cos x$, $\frac{1}{3}$; T3: $x \in [-1, 2]$, $\frac{9}{2}$; T4: $\frac{1}{10} \int_0^{10} (4 + 0,6t) dt = \frac{70}{10} = 7$ mg/l.