MATEMATYKA • Technologia Drewna (studia niestacjonarne) • zestaw zadań

Ćwiczenia 6 • 9.01.2027 • 3 h

Wyznaczniki. Macierz odwrotna

Wyznaczniki stopnia 2 i 3 (reguła Sarrusa) • dopełnienia algebraiczne, rozwinięcie Laplace'a • własności wyznaczników • macierz osobliwa, pole trójkąta • macierz odwrotna • równania macierzowe. Materiał teoretyczny: streszczenie wykładów 9–10.

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka • Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

Przypomnienie

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$; stopień 3 – reguła Sarrusa; $D_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$, $\det A = a_{i1}D_{i1} + \cdots + a_{in}D_{in}$.
$W_i \leftrightarrow W_j$ – zmiana znaku; $W_i \to W_i + cW_j$ – bez zmian; macierz trójkątna – iloczyn przekątnej; pole trójkąta $P = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}\right\|$.
$A^{-1} = \frac{1}{\det A}[D_{ij}]^T$; $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$; $[A \mid I] \to [I \mid A^{-1}]$; $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$, $XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}$.

Zadania na ćwiczenia

Zadanie 1. Oblicz wyznaczniki:

a) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 0{,}5 & 4 \\ 1{,}5 & 2 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} a & a+2 \\ a-2 & a \end{vmatrix}$

Zadanie 2. Oblicz wyznaczniki, stosując regułę Sarrusa:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \end{vmatrix}$

Zadanie 3. Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ wyznacz dopełnienia algebraiczne D_{11}, D_{12}, D_{13} i oblicz $\det A$, rozwijając go względem pierwszego wiersza. Następnie oblicz $\det A$, rozwijając go względem drugiej kolumny. Która droga jest krótsza?

Zadanie 4. Oblicz wyznaczniki, stosując rozwinięcie Laplace'a względem odpowiednio dobranego wiersza lub kolumny:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

Zadanie 5. Za pomocą operacji elementarnych sprowadź do postaci trójkątnej i oblicz:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ **b)** ★ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

Zadanie 6. Korzystając z własności wyznaczników (bez rachunków), podaj wartości:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 7 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 3 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 8 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

d) Wiadomo, że A jest macierzą stopnia 3 i $\det A = 3$. Oblicz $\det A^T$, $\det(2A)$, $\det(A^2)$ oraz wyznacznik macierzy powstałej z A przez zamianę dwóch wierszy.

Zadanie 7. Dla jakich wartości x macierz jest osobliwa?

a) $\begin{bmatrix} x-1 & 2 \\ 4 & x+1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 2 & x \\ x & 8 \end{bmatrix}$ **c)** ★ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix}$

Zadanie 8. (plac składowy) a) Plac składowy tarcicy ma kształt trójkąta o wierzchołkach $A(0,0)$, $B(30,5)$, $C(10,25)$ (współrzędne w metrach). Oblicz jego powierzchnię.
b)★ Działka tartaku ma kształt czworokąta $ABCD$: $A(0,0)$, $B(60,0)$, $C(70,40)$, $D(10,50)$ (w metrach). Oblicz jej powierzchnię, dzieląc ją przekątną AC na dwa trójkąty.

Zadanie 9. Wyznacz macierze odwrotne (o ile istnieją) i wykonaj sprawdzenie:

a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Zadanie 10. Wyznacz macierze odwrotne: a) i b) metodą dopełnień algebraicznych, c) metodą Gaussa–Jordana:

a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Zadanie 11. Rozwiąż równania macierzowe, gdzie $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$:

a) $AX = B$ **b)** $XA = B$ **c)** ★ $AX - A = 2X$

Zadanie 12. (plan produkcji) Stolarnia produkuje okna i drzwi. Na jedno okno zużywa 0,05 m^3 tarcicy i 6 h pracy, a na jedne drzwi – 0,1 m^3 tarcicy i 8 h pracy (wartości przykładowe). Niech x – liczba okien, y – liczba drzwi.

a) Zapisz zależność zużycia tarcicy i czasu pracy od x, y w postaci $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ G \end{bmatrix}$ i wyznacz A^{-1}.

b) W styczniu zużyto $T = 3{,}5$ m^3 tarcicy i $G = 380$ h pracy, a w lutym 4 m^3 i 440 h. Ile okien i drzwi wyprodukowano w każdym miesiącu?

Zadania do pracy samodzielnej

Zadanie S1. Oblicz: a) $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

Zadanie S2. Wyznacz macierz odwrotną do $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ i wykonaj sprawdzenie.

Zadanie S3. (plac składowy) Oblicz pole trójkątnego placu składowego kłód o wierzchołkach $(2, 1)$, $(10, 3)$, $(5, 7)$ (współrzędne w metrach).

Sprawdź, co umiesz (ok. 20 minut)

Zadanie T1. Oblicz $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Zadanie T2. Wyznacz macierz odwrotną do $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ i wykonaj sprawdzenie.

Zadanie T3. Rozwiąż równanie $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Odpowiedzi

Zad. 1. a) 14; b) $2-12=-10$; c) $1-6=-5$; d) $a^2-(a^2-4)=4$.

Zad. 2. a) 10; b) -13; c) 21; d) -8 (macierz trójkątna: $2\cdot(-1)\cdot 4$).

Zad. 3. $D_{11}=\begin{vmatrix}3&-2\\0&4\end{vmatrix}=12$, $D_{12}=-\begin{vmatrix}1&-2\\3&4\end{vmatrix}=-10$, $D_{13}=\begin{vmatrix}1&3\\3&0\end{vmatrix}=-9$; $\det A=2\cdot 12+0\cdot(-10)+1\cdot(-9)=15$; kolumna 2 (dwa zera): $\det A=3\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2&1\\3&4\end{vmatrix}=3\cdot 5=15$ – krótsza.

Zad. 4. a) rozwinięcie wzdłuż 3. wiersza (skreślamy wiersz 3 i kolumnę 3), potem wzdłuż 1. wiersza: $1\cdot 1\cdot(1\cdot 1-3\cdot 2)=-5$; b) wzdłuż 4. kolumny: $2\cdot(-1)^{4+4}\cdot(-13)=-26$ (wyznacznik stopnia 3 z wierszy $[3,0,1]$, $[1,2,0]$, $[4,1,-1]$ jest równy -13).

Zad. 5. a) W_2-2W_1, W_3-3W_1, potem W_3+2W_2: przekątna $1,\ 1,\ -8$, $\det=-8$; b) W_2-W_1, W_3-W_1, W_4-W_1, potem W_3-W_2, W_4-W_2, W_4-W_3: macierz trójkątna z jedynkami na przekątnej, $\det=1$.

Zad. 6. a) 0 (wiersz 2 = 2· wiersz 1); b) 0 (wiersz zerowy); c) -10 (macierz trójkątna); d) 3; $2^3\cdot 3=24$; 9; -3.

Zad. 7. a) $x^2-9=0$, $x=\pm 3$; b) $16-x^2=0$, $x=\pm 4$; c) $(x-1)^2=0$, $x=1$.

Zad. 8. a) $P=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}30&5\\10&25\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}|750-50|=350$ m^2; b) $P_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}60&0\\70&40\end{matrix}\right\|=1200$, $P_{ACD}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}70&40\\10&50\end{matrix}\right\|=1550$, $P=2750$ m^2.

Zad. 9. a) $\det=3$, $\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&1\\3&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\1&1\end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix}2&-3\\-1&2\end{bmatrix}$; c) $\det=0$ – nie istnieje; d) $\begin{bmatrix}1&-2\\-2&5\end{bmatrix}$.

Zad. 10. a) $\det=-1$, $A^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&2\\-1&1&2\\0&-1&-3\end{bmatrix}$; b) $\det=4$, $A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&-1\end{bmatrix}$ (np. W_3-W_1, W_3-W_2, $W_3\to -W_3$, W_1-W_3, W_2-W_3).

Zad. 11. $A^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1\\-3&2\end{bmatrix}$; a) $X=A^{-1}B=\begin{bmatrix}-2&1\\5&-2\end{bmatrix}$; b) $X=BA^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1\\11&-6\end{bmatrix}$; c) $(A-2I)X=A$, $A-2I=\begin{bmatrix}0&1\\3&0\end{bmatrix}$, $X=(A-2I)^{-1}A=\begin{bmatrix}1&\frac{2}{3}\\2&1\end{bmatrix}$.

Zad. 12. a) $A=\begin{bmatrix}0{,}05&0{,}1\\6&8\end{bmatrix}$, $\det A=0{,}4-0{,}6=-0{,}2$, $A^{-1}=\frac{1}{-0{,}2}\begin{bmatrix}8&-0{,}1\\-6&0{,}05\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-40&0{,}5\\30&-0{,}25\end{bmatrix}$; b) styczeń: $x=-140+190=50$ okien, $y=105-95=10$ drzwi; luty: $x=-160+220=60$ okien, $y=120-110=10$ drzwi.

Zad. S1. a) 11; b) 12; c) rozwinięcie wzdłuż 3. wiersza, potem wzdłuż 2. kolumny: $1\cdot 3\cdot(2\cdot 3-1\cdot 4)=6$.

Zad. S2. $\det=4$, $A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}2&-4&2\\1&2&-1\\-1&2&1\end{bmatrix}$.

Zad. S3. $P=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}8&2\\3&6\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\cdot 42=21$ m^2.

Sprawdź. T1: $(0-4+6)-(0-4+1)=5$; T2: $\det=1$, $A^{-1}=\begin{bmatrix}2&-5\\-1&3\end{bmatrix}$; T3: $X=A^{-1}\begin{bmatrix}2&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&2\\1&-1\end{bmatrix}$.