

Ćwiczenia 6

Pochodna funkcji złożonej, interpretacja geometryczna i fizyczna

Pochodne funkcji złożonych • równanie stycznej • prędkość • różniczka i obliczenia przybliżone • zastosowania w ekoenergetyce. Czas: 2 h. Materiał teoretyczny: streszczenia wykładów 5 i 6.

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka • Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

Przypomnienie

$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$; np. $(e^u)' = e^u u'$, $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$, $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$, $(u^n)' = nu^{n-1}u'$.

Styczna: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$; prędkość $v(t) = s'(t)$; $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$.

Zadania na ćwiczenia

Zadanie 1. Oblicz pochodne funkcji:

- a) $y = 2 + 4x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{13}{5}x^5 - 2x^6$ b) $y = 2x^3 \sin x$ c) $y = x - \operatorname{tg} x$
 d) $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x - 3}$ e) $y = \frac{8x^3}{x^3 + x - 1}$ f) $y = e^{\ln x}$

Zadanie 2. Oblicz pochodne funkcji złożonych:

- a) $y = \cos^2 x$ b) $y = \sin^3 2x$ c) $y = e^{\sin x}$
 d) $y = e^{-x^2}$ e) $y = \ln(x^2 + 1)$ f) $y = \sqrt{1 - x^2}$
 g) $y = \cos(3x + 1)$ h) $y = 3e^{2\sin^3 x}$ i) $y = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 + 1}}$
 j) $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$ k) $y = x \arccos x - \sqrt{1 - x^2}$ l) ★ $y = \ln[\ln(\ln x)]$

Zadanie 3. Znajdź równanie stycznej do wykresu funkcji w punkcie o odciętej x_0 :

- a) $y = 2x^2 + 1$, $x_0 = 0$ b) $y = 2x^2 + 1$, $x_0 = 1$ c) $y = e^x$, $x_0 = 0$
 d) $y = \ln x$, $x_0 = 1$ e) $y = \sin x$, $x_0 = \pi$ f) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$

Zadanie 4. Funkcja $y = x^2 - 4x - 2$ wyraża zależność drogi y od czasu x pewnego obiektu. Wyznacz jego prędkość w chwili $x_0 = 3$.

Zadanie 5. Położenie punktu P na osi liczbowej dane jest wzorem $s(t) = 6t^3 - 12t + 36$, gdzie t – czas w sekundach, $s(t)$ – położenie w centymetrach. Opisz ruch punktu P w przedziale czasu $\langle 3; 10 \rangle$ (wyznacz prędkość $v(t) = s'(t)$ i przyspieszenie $a(t) = v'(t)$).

Zadanie 6. Korzystając z różniczki, oblicz przybliżoną wartość: a) $\sqrt{4,04}$, b) $\sqrt[3]{28}$, c) $\ln 1,02$.

Zadanie 7. (ekoenergetyka) W uproszczonym modelu moc turbiny wiatrowej wynosi $P(v) = 1,5 v^3$ [kW], gdzie v – prędkość wiatru [m/s].

- a) Oblicz $P(6)$ oraz $P'(6)$ i podaj jednostkę pochodnej.
- b) Korzystając z różniczki, oszacuj przyrost mocy, gdy prędkość wiatru wzrośnie z 6 do 6,4 m/s. Porównaj z wartością dokładną.

Zadania do pracy samodzielnej

Zadanie S1. Oblicz pochodne funkcji:

- | | | |
|---|---|---|
| a) $y = \sqrt{\ln x}$ | b) $y = \frac{x \sin x}{1 + \operatorname{tg} x}$ | c) $y = \frac{3}{(1 - x^2)(1 - 2x^3)}$ |
| d) $y = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$ | e) $y = 3 \ln \left(\cos \frac{1}{2}x \right)^2$ | f) $y = \frac{(2x-1)e^x}{2\sqrt{x}}$ |
| g) $y = \arccos(\cos^2 x)$ | h) $y = \frac{\sin x + \cos x}{2 \sin 2x}$ | i) ★ $y = \arcsin x + \arcsin \sqrt{1-x^2}$,
$x \in (0; 1)$ |

Zadanie S2. Znajdź równanie stycznej do wykresu funkcji $y = x^3 - 2x$ w punkcie $x_0 = 2$ oraz do wykresu $y = e^{2x}$ w punkcie $x_0 = 0$.

Zadanie S3. (ekoenergetyka) Temperatura wody w zasobniku ciepłej wody użytkowej po wyłączeniu grzania zmienia się według wzoru $T(t) = 20 + 60 e^{-0,05t}$ [°C], gdzie t – czas w godzinach.

- a) Oblicz szybkość zmian temperatury $T'(t)$ w chwilach $t = 0$ i $t = 10$ h. Co oznacza znak pochodnej?
- b) Do jakiej temperatury dąży woda w zasobniku, gdy $t \rightarrow \infty$?

Sprawdź, co umiesz (ok. 20 minut)

Zadanie T1. Oblicz pochodne: a) $y = (x^2 + 3)^5$, b) $y = \ln \sin x$, c) $y = e^x \sin 2x$.

Zadanie T2. Znajdź równanie stycznej do wykresu funkcji $y = x^3$ w punkcie $x_0 = 1$.

Zadanie T3. Ciało porusza się według wzoru $s(t) = t^3 - 3t$ [m]. Oblicz jego prędkość w chwili $t = 2$ s.

Odpowiedzi

Zad. 1. a) $4 - x^2 - 6x^3 + 13x^4 - 12x^5$; b) $6x^2 \sin x + 2x^3 \cos x$; c) $1 - \frac{1}{\cos^2 x} = -\operatorname{tg}^2 x$; d) $\frac{4x(x-3)}{(x^2+2x-3)^2}$; e) $\frac{8x^2(2x-3)}{(x^3+x-1)^2}$; f) 1 (bo $e^{\ln x} = x$, $x > 0$).

Zad. 2. a) $-2 \cos x \sin x = -\sin 2x$; b) $6 \sin^2 2x \cos 2x$; c) $e^{\sin x} \cos x$; d) $-2xe^{-x^2}$; e) $\frac{2x}{x^2+1}$; f) $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; g) $-3 \sin(3x+1)$; h) $18e^{2 \sin^3 x} \sin^2 x \cos x$; i) $\frac{x(x^3+2)}{(x^3+1)^{4/3}}$; j) $\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$; k) $\arccos x$; l) $\frac{1}{x \ln x \cdot \ln(\ln x)}$.

Zad. 3. a) $y = 1$; b) $y = 4x - 1$; c) $y = x + 1$; d) $y = x - 1$; e) $y = -x + \pi$; f) $y = \frac{1}{4}x + 1$.

Zad. 4. $v(3) = y'(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2$.

Zad. 5. $v(t) = 18t^2 - 12 > 0$ (od 150 do 1788 cm/s) – punkt porusza się w kierunku dodatnim; $a(t) = 36t > 0$ – ruch przyspieszony.

Zad. 6. a) $2 + \frac{0,04}{4} = 2,01$; b) $3 + \frac{1}{27} \approx 3,037$; c) $0 + 1 \cdot 0,02 = 0,02$.

Zad. 7. a) $P(6) = 324 \text{ kW}$, $P'(v) = 4,5v^2$, $P'(6) = 162 \text{ kW/(m/s)}$; b) $dP = 162 \cdot 0,4 = 64,8 \text{ kW}$; dokładnie $P(6,4) - P(6) \approx 69,2 \text{ kW}$.

Zad. S1. a) $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$; b) $\frac{(\sin x + x \cos x)(1 + \operatorname{tg} x) - \frac{x \sin x}{\cos^2 x}}{(1 + \operatorname{tg} x)^2}$; c) $\frac{6x[3x(1-2x^3)(x^2-1) - (2x^3-1)^2]}{(x^2-1)^2(2x^3-1)^3}$ (lub równoważna postać); d) $\frac{1}{1+x^2}$; e) $-3 \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; f) $\frac{(4x^2+1)e^x}{4x\sqrt{x}}$; g) $\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos^4 x}}$; h) $\frac{(\cos x - \sin x) \sin 2x - 2(\sin x + \cos x) \cos 2x}{2 \sin^2 2x}$; i) 0 – funkcja jest stała, równa $\frac{\pi}{2}$.

Zad. S2. $y = 10x - 16$; $y = 2x + 1$.

Zad. S3. a) $T'(t) = -3e^{-0,05t}$; $T'(0) = -3^\circ\text{C/h}$, $T'(10) \approx -1,82^\circ\text{C/h}$ – temperatura maleje, coraz wolniej; b) do 20°C (temperatura otoczenia).

Sprawdź. T1: a) $10x(x^2+3)^4$, b) $\operatorname{ctg} x$, c) $e^x(\sin 2x + 2 \cos 2x)$; T2: $y = 3x - 2$; T3: $v(2) = 3 \cdot 4 - 3 = 9 \text{ m/s}$.