

Ćwiczenia 7

Równania różniczkowe i ich zastosowania

Sprawdzanie rozwiązań • równania o zmiennych rozdzielonych • zagadnienie początkowe • modele: rozkład zanieczyszczeń, oczyszczanie jeziora, stygnięcie, populacje. Materiał teoretyczny: streszczenie wykładu 7.

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka • Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

💡 Przypomnienie

Zmienne rozdzielone: $y' = f(x)g(y) \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$; warunek $y(x_0) = y_0$ wyznacza stałą C .

$\ln|y| = \ln|x| + \ln|C| \Rightarrow y = Cx$; $\ln|y| = h(x) + \ln|C| \Rightarrow y = Ce^{h(x)}$.

Modele: $L' = -kL \Rightarrow L = L_0 e^{-kt}$; $c' = k(c_{\text{dop}} - c) \Rightarrow c = c_{\text{dop}} + (c_0 - c_{\text{dop}})e^{-kt}$.

📁 Zadania na ćwiczenia

Zadanie 1. Sprawdź, czy podana funkcja jest rozwiązaniem równania ($C \in \mathbb{R}$):

a) $y = Ce^{3x}$, $y' = 3y$

b) $y = Cx^2$, $xy' = 2y$

c) $y = 5 + Ce^{-2x}$, $y' = 10 - 2y$

Zadanie 2. Wyznacz całki ogólne równań o zmiennych rozdzielonych:

a) $y' = 2xy$

b) $xy' = 2y$

c) $y' = \frac{x}{y}$

d) $y' = 3x^2y$

e) $y' = e^{x-y}$

f) ★ $y' = y^2 \cos x$

Zadanie 3. Rozwiąż zagadnienia początkowe:

a) $y' = -2xy$, $y(0) = 3$

b) $y' = \frac{y}{x}$, $y(2) = 6$

c) $yy' = x$, $y(0) = 2$

d) $y' = -0,5y$, $y(0) = 40$

Zadanie 4. (samooczyszczanie) BZT wody w rzece poniżej zrzutu ścieków wynosi 15 mg/l, a po 2 dobach – 9 mg/l. Przyjmując model $L' = -kL$, wyznacz $L(t)$ i stałą k . Ile wyniesie BZT po 6 dobach?

Zadanie 5. (jezioro) Stężenie fosforanów w jeziorze wynosi 60 $\mu\text{g/l}$. Po modernizacji oczyszczalni dopływ ma stężenie 5 $\mu\text{g/l}$, a wymiana wody w jeziorze opisana jest współczynnikiem $k = 0,05 \text{ doba}^{-1}$. Zapisz równanie $c' = k(c_{\text{dop}} - c)$, rozwiąż je i oblicz, po ilu dobach stężenie spadnie do 16 $\mu\text{g/l}$.

Zadanie 6. (stygnięcie) Woda zrzucana z chłodni ma temperaturę 40°C, a temperatura powietrza wynosi 10°C. Po 1 h woda w zbiorniku ma 30°C. Korzystając z prawa Newtona $T' = -k(T - 10)$, oblicz temperaturę wody po 3 h. Po jakim czasie woda ostygnie do 15°C?

 Zadania do pracy samodzielnej

Zadanie S1. Rozwiąż równania:

a) $y' = 4x^3 y$

b) $y' = \frac{1+y}{x}$

c) $y' = y^2, y(1) = 1$

Zadanie S2. (populacja) Populacja żubrów w rezerwacie liczy 200 osobników i rośnie zgodnie z modelem $x' = 0,03 x$ (t w latach). Ile żubrów będzie po 10 latach? Po ilu latach populacja się podwoi?

Zadanie S3. (izotop) Cez-137 skażający glebę ma okres półtrwania 30 lat. Rozpad opisuje równanie $m' = -km$. Wyznacz k oraz czas, po którym w glebie pozostanie 10% początkowej ilości cezu.

 Sprawdź, co umiesz (ok. 20 minut)

Zadanie T1. Wyznacz całkę ogólną równania $y' = 6x^2 y$.

Zadanie T2. Rozwiąż zagadnienie początkowe $y y' = 2x, y(0) = 1$.

Zadanie T3. Stężenie pestycydu w glebie maleje zgodnie z równaniem $c' = -0,1 c$ (t w dobach), $c(0) = 50$ mg/kg. Wyznacz $c(t)$ i oblicz, po ilu dobach stężenie spadnie o połowę.

 Odpowiedzi

Zad. 1. a) tak; b) $y' = 2Cx$, $xy' = 2Cx^2 = 2y - \text{tak}$; c) $y' = -2Ce^{-2x}$, $10 - 2y = -2Ce^{-2x} - \text{tak}$.

Zad. 2. a) $y = Ce^{x^2}$; b) $y = Cx^2$; c) $y^2 = x^2 + C$; d) $y = Ce^{x^3}$; e) $e^y = e^x + C$, $y = \ln(e^x + C)$; f) $-\frac{1}{y} = \sin x + C$, $y = -\frac{1}{\sin x + C}$ oraz $y \equiv 0$.

Zad. 3. a) $y = 3e^{-x^2}$; b) $y = 3x$; c) $y^2 = x^2 + 4$, $y = \sqrt{x^2 + 4}$; d) $y = 40e^{-0,5x}$.

Zad. 4. $L(t) = 15e^{-kt}$, $e^{-2k} = 0,6$, $k = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{3} \approx 0,255 \text{ doba}^{-1}$; $L(6) = 15 \cdot 0,6^3 = 3,24 \text{ mg/l}$.

Zad. 5. $c' = 0,05(5 - c)$; $c(t) = 5 + 55e^{-0,05t}$; $55e^{-0,05t} = 11$, $t = 20 \ln 5 \approx 32,2 \text{ doby}$.

Zad. 6. $T(t) = 10 + 30e^{-kt}$, $e^{-k} = \frac{2}{3}$; $T(3) = 10 + 30 \cdot \frac{8}{27} \approx 18,9^\circ\text{C}$; $e^{-kt} = \frac{1}{6}$, $t = \frac{\ln 6}{\ln 1,5} \approx 4,4 \text{ h}$.

Zad. S1. a) $y = Ce^{x^4}$; b) $\ln|1 + y| = \ln|x| + \ln|C|$, $y = Cx - 1$; c) $-\frac{1}{y} = x - 2$, $y = \frac{1}{2-x}$.

Zad. S2. $x(t) = 200e^{0,03t}$; $x(10) = 200e^{0,3} \approx 270$; $t = \frac{\ln 2}{0,03} \approx 23,1 \text{ roku}$.

Zad. S3. $k = \frac{\ln 2}{30} \approx 0,0231 \text{ rok}^{-1}$; $e^{-kt} = 0,1$, $t = \frac{\ln 10}{k} = 30 \cdot \frac{\ln 10}{\ln 2} \approx 99,7 \text{ roku}$.

Sprawdź. T1: $y = Ce^{2x^3}$; T2: $\frac{y^2}{2} = x^2 + C$, $y = \sqrt{2x^2 + 1}$; T3: $c(t) = 50e^{-0,1t}$, $t = 10 \ln 2 \approx 6,9 \text{ doby}$.