MATEMATYKA • Technologia Drewna (studia niestacjonarne) • zestaw zadań

Ćwiczenia 7 • 31.01.2027 • 3 h

Układy równań liniowych. Powtórzenie

Wzory Cramera • metoda macierzy odwrotnej • metoda eliminacji Gaussa • twierdzenie Kroneckera–Capellego • zadania tekstowe: plan produkcji mebli, mieszanie zrębków, masa klejowa • powtórzenie materiału z semestru. Materiał teoretyczny: streszczenie wykładów 9–10 (oraz streszczenia bloków I–IV).

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka • Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

Przypomnienie

Kronecker–Capelli: rozwiązanie $\iff \operatorname{rz} A = \operatorname{rz}[A \mid B]$; $= n$ – jedno; $= r < n$ – nieskończenie wiele ($n - r$ parametrów).

Cramer ($\det A = W \neq 0$): $x_j = \dfrac{W_j}{W}$; $X = A^{-1}B$; Gauss: $[A \mid B] \to$ postać schodkowa $\to$ podstawianie wstecz.

Wilgotność drewna: $w = \frac{m - m_0}{m_0} \cdot 100\%$, masa wody $= w\, m_0$, $m = m_0(1 + w)$.

Zadania na ćwiczenia

Zadanie 1. Rozwiąż układy, stosując wzory Cramera:

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x - y = -1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x + y = 1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$

Zadanie 2. Rozwiąż układy metodą macierzy odwrotnej:

a) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 5x + 3y = 7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + z = 2 \\ y + z = 3 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$ (ćw. 6, zad. 10c)

Zadanie 3. Rozwiąż układy metodą eliminacji Gaussa:

a) $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + 3z = 7 \\ 3x + y + z = 7 \end{cases}$ **b)** ★ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$

Zadanie 4. Korzystając z twierdzenia Kroneckera–Capellego, zbadaj liczbę rozwiązań układu i rozwiąż go (metodą Gaussa):

a) $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - 3y + 4z = 4 \\ 3x - 5y + 5z = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - 3y + 4z = 4 \\ 3x - 5y + 5z = 6 \end{cases}$

Zadanie 5. ★ Dla jakiej wartości a układ $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + ay = 3 \end{cases}$ jest sprzeczny? Rozwiąż go dla $a = 3$.

Zadanie 6. (plan produkcji) Zakład produkuje stoły, krzesła i regały. Na stół zużywa się 2 m^2 płyty, 3 m^2 okleiny i 5 h pracy, na krzesło – 1 m^2 płyty, 1 m^2 okleiny i 2 h, na regał – 4 m^2 płyty, 5 m^2 okleiny i 8 h (wartości przykładowe). W miesiącu zakład dysponuje 130 m^2 płyty, 155 m^2 okleiny i 275 h pracy. Ile mebli każdego rodzaju należy wykonać, aby w pełni wykorzystać zasoby? Sprawdź najpierw, czy plan jest wyznaczony jednoznacznie.

Zadanie 7. (zrębki) Zrębki świeże mają wilgotność 60%, a wióry podsuszone – 10%. Potrzeba 1300 kg mieszanki o wilgotności 30% (wartości przykładowe).

a) Oblicz suchą masę mieszanki i masę zawartej w niej wody.

b) Ułóż bilans suchej masy i bilans wody dla suchych mas x (zrębki) i y (wióry); rozwiąż układ.

c) Ile kilogramów zrębków i wiórów (w stanie wilgotnym) należy zmieszać? Wykonaj sprawdzenie.

Zadanie 8. (masa klejowa) Masę klejową (200 kg) przygotowujemy z roztworu żywicy (60% suchej masy), wody i mąki jako wypełniacza (90% s.m.). Masa ma zawierać 117 kg suchej masy, a mąki ma być 5 razy mniej niż roztworu żywicy (wartości przykładowe). Ile kilogramów każdego składnika należy użyć?

Zadanie 9. (jednoznaczność planu) ★ Zużycie płyty, okleiny i czasu pracy na trzy wyroby opisuje macierz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & a \end{bmatrix}$ (kolumny – wyroby, wiersze – zasoby).

a) Dla jakich a plan produkcji jest wyznaczony jednoznacznie przez zużycie zasobów?

b) Dla $a = 5$ rozwiąż układ $AX = B$, $B = [100,\ 70,\ 170]^T$, i wypisz wszystkie plany o nieujemnych, całkowitych liczbach wyrobów. Jak zinterpretować wynik?

Zadania do pracy samodzielnej

Zadanie S1. Rozwiąż układ metodą Cramera i metodą Gaussa: $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x + 3y - z = -2 \\ 3x - y + 2z = 9 \end{cases}$.

Zadanie S2. Zbadaj, czy układ $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 3y + z = 6 \\ 3x + 4y + 2z = 9 \end{cases}$ jest oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny, i wyznacz jego rozwiązania.

Zadanie S3. (skład drewna) Skład drewna kupił 30 m^3 tarcicy sosnowej, świerkowej i dębowej, płacąc 51 600 zł. Ceny wynosiły odpowiednio 1000, 800 i 3000 zł/m^3 (wartości przykładowe), a tarcicy świerkowej kupiono dwa razy więcej niż sosnowej. Ile m^3 tarcicy każdego gatunku kupiono?

Sprawdź, co umiesz (ok. 25 minut)

Zadanie T1. Rozwiąż metodą Cramera: $\begin{cases} 4x - y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$.

Zadanie T2. Rozwiąż metodą Gaussa: $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 2x + y + z = 4 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$.

Zadanie T3. Ile litrów roztworu impregnatu o stężeniu 10% i 40% należy zmieszać, aby otrzymać 30 litrów roztworu o stężeniu 20%?

Powtórzenie (zadania przekrojowe z semestru)

Zadanie P1. (funkcje, granice) a) Oblicz $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$. b) Wyznacz asymptoty wykresu funkcji $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 3}$.

Zadanie P2. (pochodna) Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

Zadanie P3. (optymalizacja) Z kłody o średnicy $d = 30$ cm wycina się belkę o przekroju prostokątnym $b \times h$ ($b^2 + h^2 = d^2$). Wytrzymałość belki na zginanie jest proporcjonalna do wskaźnika wytrzymałości przekroju $W = \frac{bh^2}{6}$ (M.E. Niezgodziński, T. Niezgodziński, *Wytrzymałość materiałów*, PWN, Warszawa 2004). Wyznacz wymiary b i h, dla których W jest największy.

Zadanie P4. (całka) a) Oblicz $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1)\,\mathrm{d}x$. b) Oblicz pole obszaru ograniczonego wykresami $y = x^2$ i $y = 2x$.

Zadanie P5. (macierze) Dla $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ oblicz AB, $\det(AB)$ i $(AB)^{-1}$.

Odpowiedzi

Zad. 1. a) $W=-5$, $W_x=-5$, $W_y=-10$: $(1,2)$; b) $W=14$, $W_x=7$, $W_y=-14$: $(\frac{1}{2},-1)$; c) $W=-9$, $W_1=-9$, $W_2=-18$, $W_3=-27$: $(1,2,3)$.

Zad. 2. a) $A^{-1}=\begin{bmatrix}3&-1\\-5&2\end{bmatrix}$, $(x,y)=(2,-1)$; b) $A^{-1}=\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&-1\end{bmatrix}$, $(x,y,z)=(1,2,1)$.

Zad. 3. a) $(2,0,1)$; b) $(1,2,-1,3)$.

Zad. 4. a) $\operatorname{rz} A=\operatorname{rz}[A\mid B]=2<3$ – nieoznaczony: $(x,y,z)=(5-5t,\ 2-2t,\ t)$, $t\in\mathbb{R}$; b) $\operatorname{rz} A=2\neq\operatorname{rz}[A\mid B]=3$ – sprzeczny.

Zad. 5. $W=a-2$; dla $a=2$: $\begin{cases}x+y=1\\x+y=\frac{3}{2}\end{cases}$ – sprzeczny; dla $a=3$: $W=1$, $(x,y)=(0,1)$.

Zad. 6. $\begin{cases}2x_1+x_2+4x_3=130\\3x_1+x_2+5x_3=155\\5x_1+2x_2+8x_3=275\end{cases}$, $W=1\neq 0$ – plan jednoznaczny; $W_1=15$, $W_2=60$, $W_3=10$: 15 stołów, 60 krzeseł, 10 regałów.

Zad. 7. a) $m_0=\frac{1300}{1,3}=1000$ kg, woda 300 kg; b) $\begin{cases}x+y=1000\\0{,}6x+0{,}1y=300\end{cases}$: $x=400$ kg, $y=600$ kg; c) zrębki $400\cdot 1{,}6=640$ kg, wióry $600\cdot 1{,}1=660$ kg; sprawdzenie: $640+660=1300$, woda $240+60=300$ kg.

Zad. 8. x – żywica, y – woda, z – mąka: $\begin{cases}x+y+z=200\\0{,}6x+0{,}9z=117\\x=5z\end{cases}$: $3z+0{,}9z=117$, $z=30$ kg, $x=150$ kg, $y=20$ kg.

Zad. 9. a) $\det A=a-5$; plan jednoznaczny dla $a\neq 5$; b) kolumna 3 = kolumna 1 + kolumna 2, $\operatorname{rz} A=\operatorname{rz}[A\mid B]=2$: $(x_1,x_2,x_3)=(30-t,\ 40-t,\ t)$; plany całkowite nieujemne dla $t=0,1,\ldots,30$ (31 planów) – wyrób 3 można „zamienić” na wyroby 1 i 2 bez zmiany zużycia.

Zad. S1. $W=-5$, $W_x=-10$, $W_y=5$, $W_z=-5$: $(x,y,z)=(2,-1,1)$.

Zad. S2. nieoznaczony ($\operatorname{rz} A=\operatorname{rz}[A\mid B]=2<3$): $(3-2t,\ t,\ t)$, $t\in\mathbb{R}$.

Zad. S3. $\begin{cases}x+y+z=30\\1000x+800y+3000z=51\,600\\y=2x\end{cases}$: 6 m^3 sosny, 12 m^3 świerka, 12 m^3 dębu.

Sprawdź. T1: $W=9$, $W_x=18$, $W_y=9$: $(2,1)$; T2: $(1,1,1)$; T3: $\begin{cases}x+y=30\\0{,}1x+0{,}4y=6\end{cases}$: 20 l roztworu 10% i 10 l roztworu 40%.

Zad. P1. a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)}=\frac{4}{3}$; b) pionowa $x=3$, pozioma $y=2$.

Zad. P2. $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$; rośnie na $(-\infty;1)$ i $(3;\infty)$, maleje na $(1;3)$; maksimum $f(1)=4$, minimum $f(3)=0$.

Zad. P3. $W(b)=\frac{b(900-b^2)}{6}$, $W'(b)=\frac{900-3b^2}{6}=0\Rightarrow b=\sqrt{300}=10\sqrt{3}\approx 17{,}3$ cm, $h=\sqrt{600}=10\sqrt{6}\approx 24{,}5$ cm ($h:b=\sqrt{2}$); $W_{\max}=1000\sqrt{3}\approx 1732$ cm^3.

Zad. P4. a) $\left[x^3-x^2+x\right]_0^2=6$; b) punkty przecięcia $x=0$, $x=2$; $P=\int_0^2(2x-x^2)\,\mathrm{d}x=\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{4}{3}$.

Zad. P5. $AB=\begin{bmatrix}4&7\\1&3\end{bmatrix}$, $\det(AB)=5$ (= $\det A\cdot\det B=1\cdot 5$), $(AB)^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3&-7\\-1&4\end{bmatrix}$.