

Ćwiczenia 7

Reguła de L'Hospitala

Wyrażenia nieoznaczone $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0 • reguła de L'Hospitala • asymptoty.

Czas: 2 h. Materiał teoretyczny: streszczenie wykładu 7.

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka • Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

Przypomnienie

$\lim \frac{f}{g} \stackrel{H}{=} \lim \frac{f'}{g'}$ tylko dla $[\frac{0}{0}]$ lub $[\frac{\infty}{\infty}]$; $[\infty - \infty]$ – wspólny mianownik; $[0 \cdot \infty]$ – $f g = \frac{f}{1/g}$ lub $\frac{g}{1/f}$;
 $[1^\infty]$, $[0^0]$, $[\infty^0]$ – logarytmujemy: $y = f^g$, $\ln y = g \ln f$, a na końcu $\lim y = e^{\lim \ln y}$.

Zadania na ćwiczenia

Zadanie 1. Sprawdź, czy (symbole $[\frac{0}{0}]$ i $[\frac{\infty}{\infty}]$):

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = 2$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \sqrt{x}}{x - 1} = \frac{1}{2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x} = \frac{3}{4}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln x)}{x} = 0$

f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = 0$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x} = \frac{1}{2}$

h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^3} = \infty$

i) ★ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$

Zadanie 2. Sprawdź, czy (symbol $[\infty - \infty]$):

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \frac{1}{2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right) = -\frac{1}{2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right) = -1$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{1}{\ln(x - 1)} \right) = -\frac{1}{2}$

f) ★ $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right) = \frac{2}{3}$

Zadanie 3. Sprawdź, czy (symbol $[0 \cdot \infty]$):

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} x (e^{1/x} - 1) = 1$

d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \operatorname{tg} x = -1$

e) $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x) \ln(1 - x) = 0$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3)e^x = 0$

Zadanie 4. Oblicz granice (symbole $[1^\infty]$, $[0^0]$, $[\infty^0]$):

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{x}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$

Zadanie 5. Wyznacz asymptoty poziome funkcji, korzystając z reguły de L'Hospitala: a) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$,
 b) $f(x) = x e^{-x}$.

🏠 Zadania do pracy samodzielnej

Zadanie S1. Oblicz granice:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x}$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x}$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

h) ★ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2}$

Zadanie S2. Sprawdź, czy:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)} \right) = -\frac{1}{2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = -\frac{1}{2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x = 0$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^3} = 0$

e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{1/x} = \infty$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{2x} = e^2$

📌 Sprawdź, co umiesz (ok. 20 minut)

Zadanie T1. Oblicz $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

Zadanie T2. Oblicz $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$.

Zadanie T3. Oblicz $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$.

Zadanie T4. ★ Oblicz $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}}$.

 Odpowiedzi

Zad. 1–3. Wszystkie podane równości są prawdziwe. Wskazówki: 1f) $\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} \stackrel{H}{=} \frac{1/x}{-1/\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x}{x} \rightarrow 0$; 1i) reguła trzykrotnie; 2a) $\frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}$ i dwukrotnie reguła; 3c) podstaw $t = \frac{1}{x}$; 3d) $\frac{x - \pi/2}{\operatorname{ctg} x}$.

Zad. 4. a) $\ln y = \frac{\ln(1+3x)}{x} \rightarrow 3$, granica e^3 ; b) $\ln y = x \ln x \rightarrow 0$, granica 1; c) $\ln y = \frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$, granica 1.

Zad. 5. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = 0$ – asymptota pozioma $y = 0$ w $+\infty$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$ – $y = 0$ w $+\infty$ (w $-\infty$ granica $-\infty$, brak asymptoty poziomej).

Zad. S1. a) 4; b) 3; c) 1; d) $\frac{3}{2}$; e) $\ln 2$; f) 0; g) 0; h) $\frac{1}{3}$; i) 4.

Zad. S2. Wszystkie równości są prawdziwe.

Sprawdź. T1: $\frac{1}{2}$; T2: 0; T3: e^2 ; T4: e .