

Ćwiczenia 8

Wektory: działania, norma, iloczyn skalarny

Współrzędne wektora • dodawanie, odejmowanie, mnożenie przez liczbę • norma, odległość punktów, wersor • iloczyn skalarny, kąt między wektorami, prostopadłość.

Materiał teoretyczny: streszczenie wykładu 8.

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka • Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

Przypomnienie

$$\overrightarrow{AB} = [b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n]; \mathbf{a} \pm \mathbf{b}, k\mathbf{a} - \text{po współrzędnych}; \|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}; \mathbf{a}^0 = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|} \mathbf{a}.$$

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n; \cos \alpha = \frac{\mathbf{a} \circ \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}; \mathbf{a} \perp \mathbf{b} \iff \mathbf{a} \circ \mathbf{b} = 0.$$

Zadania na ćwiczenia

Zadanie 1. W układzie współrzędnych narysuj wektory $\mathbf{u} = [2, 3]$, $\mathbf{v} = [-1, 2]$ oraz $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $2\mathbf{u}$, $-\mathbf{v}$. Zapisz $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ za pomocą wersorów $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$.

Zadanie 2. Wyznacz współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ i jego długość:

- a) $A = (1, 2)$, $B = (4, 6)$ b) $A = (-2, 3)$, $B = (1, -1)$ c) $A = (1, 0, 2)$, $B = (3, 2, 3)$

Zadanie 3. Dla wektorów $\mathbf{u} = [2, -1, 3]$ i $\mathbf{v} = [1, 4, -2]$ oblicz:

- a) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ b) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ c) $3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$ d) $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$
e) $\mathbf{u} \circ \mathbf{v}$ f) $\cos \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ g) wersor $\mathbf{u}^0$ h) ★ $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$

Zadanie 4. Oblicz kąt między wektorami:

- a) $[1, 2]$ i $[3, 1]$ b) $[1, 0, 1]$ i $[0, 1, 1]$ c) $[3, -4]$ i $[4, 3]$

Zadanie 5. Dla jakiej wartości m wektory $\mathbf{a} = [m, 2, 1]$ i $\mathbf{b} = [3, -1, m]$ są prostopadłe?

Zadanie 6. Sprawdź, że trójkąt o wierzchołkach $P = (1, 2)$, $Q = (4, 3)$, $R = (0, 5)$ jest prostokątny. Przy którym wierzchołku jest kąt prosty? Oblicz jego pole.

Zadanie 7. (dryf) Plama oleju na rzece jest unoszona przez nurt z prędkością $\mathbf{v}_1 = [4, 1]$ km/h, a wiatr dodaje prędkość $\mathbf{v}_2 = [-1, 3]$ km/h. Wyznacz prędkość wypadkową i szybkość plamy. W jakiej odległości od miejsca wycieku będzie plama po 2 h?

Zadanie 8. (emisja) Wektor $\mathbf{q} = [500, 200, 300]$ opisuje roczne zużycie [t] węgla, oleju opałowego i gazu w ciepłowni, a wektor $\mathbf{w} = [2,4; 3,1; 2,7]$ – wskaźniki emisji CO₂ [t CO₂ na t paliwa]. Oblicz łączną roczną emisję CO₂. O ile spadnie emisja, jeżeli zużycie węgla zmniejszy się o połowę?

 Zadania do pracy samodzielnej

Zadanie S1. Dla $\mathbf{u} = [3, 0, -4]$ i $\mathbf{v} = [1, 2, 2]$ oblicz $2\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$, $\mathbf{u} \circ \mathbf{v}$ i cosinus kąta między wektorami.

Zadanie S2. Wyznacz wersory wektorów: a) $[6, 8]$, b) $[2, -1, 2]$, c) $[1, 1, 1, 1]$.

Zadanie S3. (stacje) Źródło emisji znajduje się w punkcie $S = (2, 3)$ (współrzędne w km). Która stacja monitoringu jest bliżej źródła: $A = (5, 7)$ czy $B = (8, -5)$?

 Sprawdź, co umiesz (ok. 20 minut)

Zadanie T1. Wyznacz współrzędne i długość wektora $\overrightarrow{AB}$ dla $A = (2, -1, 3)$, $B = (4, 1, 4)$.

Zadanie T2. Dla $\mathbf{u} = [1, 2, -2]$ i $\mathbf{v} = [2, 1, 2]$ oblicz $\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$ oraz $\mathbf{u} \circ \mathbf{v}$. Czy wektory są prostopadłe?

Zadanie T3. Nawozy A i B wysiano w ilościach $\mathbf{d} = [100, 200]$ kg; zawartość fosforu w nich wynosi $\mathbf{w} = [0,20; 0,10]$. Ile fosforu wprowadzono do gleby?

Odpowiedzi

Zad. 1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = [1, 5]$, $\mathbf{u} - \mathbf{v} = [3, 1]$, $2\mathbf{u} = [4, 6]$, $-\mathbf{v} = [1, -2]$; $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

Zad. 2. a) $[3, 4]$, 5; b) $[3, -4]$, 5; c) $[2, 2, 1]$, 3.

Zad. 3. a) $[3, 3, 1]$; b) $[1, -5, 5]$; c) $[4, -11, 13]$; d) $\sqrt{14}$, $\sqrt{21}$; e) -8 ; f) $\frac{-8}{\sqrt{14}\sqrt{21}} = -\frac{8}{7\sqrt{6}} \approx -0,467$ (kąt rozwarty); g) $[\frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}]$; h) 19 ($= 14 + 2 \cdot (-8) + 21$).

Zad. 4. a) $\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha = 45^\circ$; b) $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = 60^\circ$; c) iloczyn = 0, $\alpha = 90^\circ$.

Zad. 5. $3m - 2 + m = 0$, $m = \frac{1}{2}$.

Zad. 6. $\overrightarrow{PQ} = [3, 1]$, $\overrightarrow{PR} = [-1, 3]$, $\overrightarrow{PQ} \circ \overrightarrow{PR} = 0$ – kąt prosty przy P ; $P_\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 5$.

Zad. 7. $\mathbf{v} = [3, 4]$ km/h, szybkość 5 km/h; po 2 h: $[6, 8]$, odległość 10 km.

Zad. 8. $\mathbf{q} \circ \mathbf{w} = 1200 + 620 + 810 = 2630$ t CO₂; spadek o $250 \cdot 2,4 = 600$ t (do 2030 t).

Zad. S1. $[7, 2, -6]$; 5; 3; $3 - 8 = -5$; $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$.

Zad. S2. a) $[0,6; 0,8]$; b) $[\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$; c) $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Zad. S3. $d(S, A) = \|[3, 4]\| = 5$ km, $d(S, B) = \|[6, -8]\| = 10$ km – bliżej jest stacja A.

Sprawdź. T1: $[2, 2, 1]$, długość 3; T2: $\mathbf{u} + 2\mathbf{v} = [5, 4, 2]$, $\mathbf{u} \circ \mathbf{v} = 0$ – tak, są prostopadłe; T3: $100 \cdot 0,2 + 200 \cdot 0,1 = 40$ kg.