

Ćwiczenia 8

Badanie przebiegu zmienności funkcji

Monotoniczność i ekstrema • druga pochodna: wypukłość, wklęsłość, punkty przegięcia • pełne badanie przebiegu zmienności funkcji. Czas: 2 h. Materiał teoretyczny: streszczenie wykładu 8.

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka • Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

Przypomnienie

Plan badania: 1) dziedzina; 2) miejsca zerowe, przecięcie z osiami, parzystość; 3) granice na krańcach dziedziny, asymptoty (pionowe: $\lim_{x \rightarrow c^\pm} f = \pm\infty$; poziome: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f = a$; ukośne: $y = mx + n$, $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx]$); 4) f' – monotoniczność i ekstrema; 5) f'' – wypukłość ($f'' > 0$), wklęsłość ($f'' < 0$), punkty przegięcia; 6) tabelka; 7) wykres.

Zadania na ćwiczenia

Zadanie 1. Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

b) $f(x) = x^4 - 2x^2$

c) $f(x) = x e^x$

d) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

e) $f(x) = x - 2 \ln x$

f) $f(x) = x^2 e^{-x}$

Zadanie 2. Dla funkcji z zadania 1 a), b), c) wyznacz przedziały wypukłości i wklęsłości oraz punkty przegięcia.

Zadanie 3. Zbadaj przebieg zmienności funkcji i naszkicuj jej wykres:

a) $f(x) = x - \frac{1}{x}$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 5$

c) $f(x) = e^{-x^2}$

d) ★ $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$

Zadania do pracy samodzielnej

Zadanie S1. Zbadaj przebieg zmienności funkcji i naszkicuj jej wykres:

a) $f(x) = \frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$

b) $f(x) = \sqrt{x} \ln x$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

d) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$

Zadanie S2. Wyznacz ekstrema funkcji $f(x) = x \ln x$ i zbadaj jej wypukłość.

Zadanie S3. (zastosowanie) Z prostokątnego arkusza blachy o wymiarach 80×50 cm wycinamy w narożnikach kwadraty o boku x i zaginamy boki, otrzymując otwarty pojemnik (np. na zbiornik solarny). Dla jakiego x objętość pojemnika $V(x) = x(80 - 2x)(50 - 2x)$ jest największa?

 **Sprawdź, co umiesz** (ok. 30 minut)

Zadanie T1. Zbadaj przebieg zmienności funkcji $f(x) = x^3 - 3x + 2$: wyznacz miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, ekstrema, przedziały wypukłości i wklęsłości, punkt przegięcia; sporządź tabelkę i naszkicuj wykres.

Odpowiedzi

Zad. 1. a) rośnie w $(-\infty; 1)$ i $(3; \infty)$, maleje w $(1; 3)$; $f_{\max} = f(1) = 4$, $f_{\min} = f(3) = 0$; b) maleje w $(-\infty; -1)$ i $(0; 1)$, rośnie w $(-1; 0)$ i $(1; \infty)$; $f_{\min} = f(\pm 1) = -1$, $f_{\max} = f(0) = 0$; c) maleje w $(-\infty; -1)$, rośnie w $(-1; \infty)$; $f_{\min} = f(-1) = -\frac{1}{e}$; d) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; rośnie w $(-\infty; 0)$ i $(2; \infty)$, maleje w $(0; 1)$ i $(1; 2)$; $f_{\max} = f(0) = 0$, $f_{\min} = f(2) = 4$; e) $D = (0; \infty)$; maleje w $(0; 2)$, rośnie w $(2; \infty)$; $f_{\min} = f(2) = 2 - 2 \ln 2 \approx 0,61$; f) maleje w $(-\infty; 0)$ i $(2; \infty)$, rośnie w $(0; 2)$; $f_{\min} = f(0) = 0$, $f_{\max} = f(2) = \frac{4}{e^2} \approx 0,54$.

Zad. 2. a) $f'' = 6(x - 2)$: wklęsła w $(-\infty; 2)$, wypukła w $(2; \infty)$, $P(2; 2)$; b) $f'' = 4(3x^2 - 1)$: wypukła w $(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3})$ i $(\frac{\sqrt{3}}{3}; \infty)$, wklęsła pomiędzy; $P(\pm \frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{5}{9})$; c) $f'' = (x + 2)e^x$: wklęsła w $(-\infty; -2)$, wypukła w $(-2; \infty)$, $P(-2; -\frac{2}{e^2})$.

Zad. 3a. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; m.z. $x = \pm 1$; nieparzysta; $f' = \frac{x^2+1}{x^2} > 0$ – rośnie w $(-\infty; 0)$ i $(0; \infty)$, brak ekstremów; $f'' = -\frac{2}{x^3}$: wypukła dla $x < 0$, wklęsła dla $x > 0$, brak punktów przegięcia; asymptota pionowa $x = 0$ ($\lim_{x \rightarrow 0^-} f = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f = -\infty$), ukośna $y = x$.

Zad. 3b. $D = \mathbb{R}$; $f' = 3[(x - 1)^2 + 1] > 0$ – rosnąca, brak ekstremów; $f'' = 6(x - 1)$: wklęsła w $(-\infty; 1)$, wypukła w $(1; \infty)$, $P(1; -1)$; jedno miejsce zerowe $x_0 \approx 1,32$; brak asymptot; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f = \pm\infty$.

Zad. 3c. $D = \mathbb{R}$; parzysta; $f > 0$; $f' = -2xe^{-x^2}$: rośnie w $(-\infty; 0)$, maleje w $(0; \infty)$, $f_{\max} = f(0) = 1$; $f'' = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$: punkty przegięcia $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, $f = e^{-1/2} \approx 0,61$; wypukła dla $|x| > \frac{\sqrt{2}}{2}$, wklęsła dla $|x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$; asymptota pozioma $y = 0$.

Zad. 3d. $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; m.z. $x = 0$; $f' = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$: rośnie w $(-\infty; 1)$ i $(3; \infty)$, maleje w $(1; 3)$; $f_{\min} = f(3) = \frac{27}{4}$ ($x = 0$ – punkt stacjonarny bez ekstremum); $f'' = \frac{6x}{(x-1)^4}$: wklęsła dla $x < 0$, wypukła dla $x > 0$ ($x \neq 1$), $P(0; 0)$; asymptoty: pionowa $x = 1$ ($\lim f = +\infty$), ukośna $y = x + 2$.

Zad. S1. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $\max f(-1) = -2$, $\min f(3) = 0$; wklęsła dla $x < 1$, wypukła dla $x > 1$; asymptoty $x = 1$, $y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$; b) $D = (0; \infty)$; m.z. $x = 1$; maleje w $(0; e^{-2})$, rośnie w $(e^{-2}; \infty)$, $f_{\min} = f(e^{-2}) = -\frac{2}{e}$; wypukła w $(0; 1)$, wklęsła w $(1; \infty)$, $P(1; 0)$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f = 0$, brak asymptot; c) $D = (-\infty; 1) \cup (3; \infty)$; m.z. 1, 3; maleje w $(-\infty; 1)$, rośnie w $(3; \infty)$; wartość najmniejsza 0 w $x = 1$ i $x = 3$; wklęsła na obu przedziałach; asymptoty ukośne $y = x - 2$ w $+\infty$, $y = -x + 2$ w $-\infty$; d) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; nieparzysta; $\max f(-1) = -2$, $\min f(1) = 2$; wklęsła dla $x < 0$, wypukła dla $x > 0$; asymptoty $x = 0$, $y = x$.

Zad. S2. $f_{\min} = f(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$; $f'' = \frac{1}{x} > 0$ – wypukła w $(0; \infty)$.

Zad. S3. $V'(x) = 12x^2 - 520x + 4000 = 0$ dla $x = 10$ lub $x = \frac{100}{3}$ (odrzucaamy, $x < 25$); $V''(10) < 0$; $x = 10$ cm, $V_{\max} = 18\,000 \text{ cm}^3 = 18 \text{ l}$.

Sprawdź. m.z. $x = -2$, $x = 1$; $f' = 3(x - 1)(x + 1)$: rośnie w $(-\infty; -1)$ i $(1; \infty)$, maleje w $(-1; 1)$; $f_{\max} = f(-1) = 4$, $f_{\min} = f(1) = 0$; $f'' = 6x$: wklęsła dla $x < 0$, wypukła dla $x > 0$, $P(0; 2)$.