

Ćwiczenia 9

Macierze: rodzaje, działania na macierzach

Rodzaje macierzy • transpozycja i ślad • dodawanie, odejmowanie, mnożenie przez liczbę • mnożenie macierzy • równania macierzowe • zastosowania. Materiał teoretyczny: streszczenie wykładu 9.

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka • Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

Przypomnienie

$A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]$, $cA = [c a_{ij}]$ – tylko dla macierzy tego samego wymiaru; A^T – wiersze $\leftrightarrow$ kolumny; $\text{tr } A = a_{11} + \dots + a_{nn}$.

AB : $c_{ij} = (i\text{-ty wiersz } A) \circ (j\text{-ta kolumna } B)$; $(m \times n)(n \times p) = m \times p$; na ogół $AB \neq BA$; $AI = IA = A$.

Zadania na ćwiczenia

Zadanie 1. Dane są macierze $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Oblicz (o ile to możliwe):

- | | | | |
|------------|----------------|-------------------|--------------|
| a) $A + B$ | b) $A - B$ | c) $3A - 2B$ | d) $A + C$ |
| e) A^T | f) $(A + B)^T$ | g) $\text{tr } C$ | h) $C^T - C$ |

Zadanie 2. Dla macierzy z zadania 1 sprawdź, które iloczyny są wykonalne, i oblicz je: AB^T , BA^T , CA , AC , $A^T C$.

Zadanie 3. Oblicz iloczyny:

- | | |
|---|---|
| a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ oraz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ | b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ oraz $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ |
| c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ | d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} I_3$ |

Zadanie 4. Wyznacz macierz X , jeżeli $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$:

- | | | |
|-----------------|-----------------|------------------|
| a) $2A + X = B$ | b) $A = X - 3I$ | c) $B - 2X = 5A$ |
|-----------------|-----------------|------------------|

Zadanie 5. Dla $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ oblicz A^2 , A^3 oraz $\text{tr } A$. ★ Odgadnij postać A^n .

Zadanie 6. (nawozy) Zawartość składników w czterech nawozach (saletra amonowa, superfosfat, sól potasowa, nawóz NPK) opisuje macierz

$$Z = \begin{bmatrix} 0,34 & 0 & 0 & 0,15 \\ 0 & 0,20 & 0 & 0,15 \\ 0 & 0 & 0,60 & 0,15 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{N} \\ \text{P.} \\ \text{K} \end{matrix}$$

Na pole wysiano kolejno 100, 150, 50 i 200 kg tych nawozów. Zapisz wektor dawek $\mathbf{d}$ i oblicz $Z\mathbf{d}$. Ile kg N, P i K wprowadzono?

Zadanie 7. (stężenia) Średnie kwartalne stężenia NO_2 [$\mu\text{g}/\text{m}^3$] na dwóch stacjach (wiersze) zawiera macierz $S = \begin{bmatrix} 40 & 30 & 26 & 36 \\ 22 & 18 & 15 & 20 \end{bmatrix}$. Oblicz $S\mathbf{u}$ dla $\mathbf{u} = [\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}]^T$ i zinterpretuj wynik. Jakie byłyby stężenia, gdyby wszystkie zmniejszyły się o 10%?

Zadania do pracy samodzielnej

Zadanie S1. Oblicz AB i BA dla $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Czy $AB = BA$? Oblicz też $(AB)^T$ i $B^T A^T$.

Zadanie S2. Wyznacz X z równania $3X - A = 2B$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Zadanie S3. (emisja) Roczne zużycie paliw [t] (węgiel, olej, gaz) w dwóch ciepłowniach to wiersze macierzy $Q = \begin{bmatrix} 500 & 200 & 300 \\ 0 & 400 & 600 \end{bmatrix}$, a wskaźniki emisji CO_2 [t/t] tworzą wektor $\mathbf{w} = [2,4; 3,1; 2,7]^T$. Oblicz $Q\mathbf{w}$. Która ciepłownia emituje więcej CO_2 ?

Sprawdź, co umiesz (ok. 20 minut)

Zadanie T1. Dla $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ oblicz $2A - B^T$.

Zadanie T2. Dla macierzy z zadania T1 oblicz AB i BA .

Zadanie T3. Nawóz A zawiera 4% N i 12% P, nawóz B – po 10% N i P. Za pomocą mnożenia macierzy oblicz, ile azotu i fosforu dostarczy 100 kg nawozu A i 50 kg nawozu B.

Odpowiedzi

Zad. 1. a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -3 & 6 & 4 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} -1 & -8 & 9 \\ 6 & 8 & -13 \end{bmatrix}$; d) niewykonalne (różne wymiary); e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$;

f) $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; g) 5; h) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Zad. 2. $AB^T = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$; $BA^T = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$; $CA = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 3 & 10 & 5 \end{bmatrix}$; AC – niewykonalne (2×3 i 2×2); $A^T C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 12 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Zad. 3. a) $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 6 \end{bmatrix}$ oraz $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$; b) $[-1]$ oraz $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$; d) ta sama macierz.

Zad. 4. a) $X = B - 2A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$; b) $X = A + 3I = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; c) $X = \frac{1}{2}(B - 5A) = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Zad. 5. $A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\text{tr } A = 3$; $A^n = \begin{bmatrix} 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Zad. 6. $\mathbf{d} = [100, 150, 50, 200]^T$; $Z\mathbf{d} = [34 + 30, 30 + 30, 30 + 30]^T = [64, 60, 60]^T$ kg.

Zad. 7. $S\mathbf{u} = [33; 18,75]^T$ – średnie roczne stężenia na stacjach; $0,9S = \begin{bmatrix} 36 & 27 & 23,4 & 32,4 \\ 19,8 & 16,2 & 13,5 & 18 \end{bmatrix}$.

Zad. S1. $AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ – nie; $(AB)^T = B^T A^T = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Zad. S2. $X = \frac{1}{3}(A + 2B) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Zad. S3. $Q\mathbf{w} = [2630; 2860]^T$ t CO₂ – więcej emituje ciepłownia 2.

Sprawdź. T1: $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$; T2: $AB = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$; T3: $\begin{bmatrix} 0,04 & 0,10 \\ 0,12 & 0,10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 17 \end{bmatrix}$ kg (N, P).