

Ćwiczenia 10

Wyznaczniki i ich własności

Wyznaczniki stopnia 2 i 3 (reguła Sarrusa) • dopełnienia algebraiczne • rozwinięcie Laplace'a • własności i operacje elementarne • macierz osobiwa • pole trójkąta. Materiał teoretyczny: streszczenie wykładu 10.

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka • Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

Przypomnienie

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$; stopień 3 – reguła Sarrusa; $D_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$, $\det A = a_{i1}D_{i1} + \dots + a_{in}D_{in}$.

$W_i \leftrightarrow W_j$ – zmiana znaku; $W_i \rightarrow cW_i - \det \times c$; $W_i \rightarrow W_i + cW_j$ – bez zmian; macierz trójkątna – iloczyn przekątnej.

Pole trójkąta: $P = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$.

Zadania na ćwiczenia

Zadanie 1. Oblicz wyznaczniki:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 8 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a & a+1 \\ a-1 & a \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix}$

Zadanie 2. Oblicz wyznaczniki, stosując regułę Sarrusa:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix}$

Zadanie 3. Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ wyznacz minory i dopełnienia algebraiczne D_{11} , D_{12} , D_{13} , D_{23} , D_{33} . Oblicz $\det A$, rozwijając go względem pierwszego wiersza oraz względem trzeciej kolumny.

Zadanie 4. Oblicz wyznaczniki, stosując rozwinięcie Laplace'a względem odpowiednio dobranego wiersza lub kolumny:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

Zadanie 5. Za pomocą operacji elementarnych sprowadź do postaci trójkątnej i oblicz:

a)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 5 \end{vmatrix}$$

b)
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Zadanie 6. Dla jakich wartości x macierz jest osobliwa ($\det = 0$)?

a)
$$\begin{bmatrix} x-1 & 2 \\ 4 & x+1 \end{bmatrix}$$

b)
$$\begin{bmatrix} 2 & x \\ x & 8 \end{bmatrix}$$

c) ★
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix}$$

Zadanie 7. Wiadomo, że A jest macierzą stopnia 3 i $\det A = 4$. Oblicz: $\det A^T$, $\det(3A)$, $\det(A^2)$, wyznacznik macierzy powstałej z A przez zamianę dwóch wierszy.

Zadanie 8. (pole) Działka przeznaczona na zalesienie ma kształt trójkąta o wierzchołkach $A(1, 1)$, $B(7, 3)$, $C(3, 6)$ (współrzędne w hm, $1 \text{ hm}^2 = 1 \text{ ha}$). Oblicz jej powierzchnię w hektarach.

Zadanie 9. (pomiary) Sprawdź, czy punkty pomiarowe $P_1(0, 1)$, $P_2(2, 4)$, $P_3(5, 10)$ leżą na jednej prostej. A punkty $(1, 3)$, $(2, 5)$, $(4, 9)$?

Zadania do pracy samodzielnej

Zadanie S1. Oblicz: a) $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Zadanie S2. Rozwiąż równanie $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$.

Zadanie S3. (pole) Oblicz pole trójkątnego oczka wodnego o wierzchołkach $(0, 0)$, $(4, 1)$, $(1, 3)$ (współrzędne w m).

Sprawdź, co umiesz (ok. 20 minut)

Zadanie T1. Oblicz $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ oraz $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

Zadanie T2. Dla jakich x wyznacznik $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 1 & x-2 \end{vmatrix}$ jest równy zeru?

Zadanie T3. Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach $(2, 1)$, $(8, 2)$, $(4, 7)$.

Odpowiedzi

Zad. 1. a) 20; b) 1; c) $a^2 - (a^2 - 1) = 1$; d) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Zad. 2. a) 10; b) -13; c) -3; d) -36 (macierz trójkątna: $3 \cdot (-2) \cdot 6$).

Zad. 3. $D_{11} = 3$, $D_{12} = -7$, $D_{13} = 1$, $D_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$, $D_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4$; $\det A = 1 \cdot 3 + (-1)(-7) + 2 \cdot 1 = 12$;
kolumna 3: $2 \cdot 1 + (-2)(-3) + 1 \cdot 4 = 12$.

Zad. 4. a) rozwinięcie wzdłuż 2. kolumny: $3 \cdot (-1)^5 \cdot 3 = -9$; b) rozwinięcie wzdłuż 3. wiersza: $1 \cdot (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5$.

Zad. 5. a) -6; b) $W_2 - W_1$, $W_3 - W_1$, $W_4 - W_1$, potem $W_3 - W_2$, $W_4 - W_2$, $W_4 - W_3$: macierz trójkątna z jedynekami na przekątnej, $\det = 1$.

Zad. 6. a) $x^2 - 9 = 0$, $x = \pm 3$; b) $16 - x^2 = 0$, $x = \pm 4$; c) $(x - 1)^2 = 0$, $x = 1$.

Zad. 7. 4; $3^3 \cdot 4 = 108$; 16; -4.

Zad. 8. $\overrightarrow{AB} = [6, 2]$, $\overrightarrow{AC} = [2, 5]$, $P = \frac{1}{2}|30 - 4| = 13$ ha.

Zad. 9. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ - nie leżą; dla (1, 3), (2, 5), (4, 9) wyznacznik = 0 - leżą na prostej $y = 2x + 1$.

Zad. S1. a) 11; b) 12; c) 12.

Zad. S2. $x^3 - 2x = 0$, $x \in \{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

Zad. S3. $P = \frac{1}{2}|12 - 1| = 5,5 \text{ m}^2$.

Sprawdź. T1: 26; -13; T2: $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1) = 0$, $x = 3$ lub $x = -1$; T3: $\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 17$.