

Ćwiczenia 10

Całkowanie funkcji wymiernych i trygonometrycznych

Wydzielanie wielomianu • rozkład na ułamki proste • całkowanie ułamków prostych I i II rodzaju • całki z funkcji trygonometrycznych. **Temat egzaminacyjny – tylko praca samodzielna.** Materiał teoretyczny: streszczenie wykładu 10.

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka • Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

Przypomnienie

Algorytm: (1) jeśli $\deg L \geq \deg M$ – wydziel wielomian; (2) rozłóż mianownik na czynniki; (3) rozłóż na ułamki proste; (4) scałkuj.

$$\int \frac{A}{px+q} dx = \frac{A}{p} \ln |px+q| + C, \quad \int \frac{dx}{(x+\alpha)^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta} \arctg \frac{x+\alpha}{\beta} + C, \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C;$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)].$$

Każdy wynik sprawdzamy przez różniczkowanie.

🏠 Zadania do pracy samodzielnej

Zadanie S1. Zapisz postać rozkładu na ułamki proste (bez wyznaczania współczynników):

a) $\frac{x^2+3}{(x+1)^2(x^2+4)}$

b) $\frac{5}{x^3(x-2)}$

c) $\frac{2x+1}{(x-3)(x^2+x+1)^2}$

d) $\frac{x}{(x-1)(x+1)(x^2-4)}$

e) ★ $\frac{1}{x^4-1}$

Zadanie S2. Oblicz całki, wydzielając najpierw wielomian:

a) $\int \frac{x+1}{x-3} dx$

b) $\int \frac{x^2+1}{x+1} dx$

c) $\int \frac{x^3}{x-1} dx$

d) $\int \frac{x^3+2x}{x^2+1} dx$

Zadanie S3. Oblicz całki (mianownik rozkłada się na czynniki liniowe):

a) $\int \frac{dx}{x^2-1}$

b) $\int \frac{x+3}{x^2-3x+2} dx$

c) $\int \frac{5x-1}{x^2-x-6} dx$

d) $\int \frac{9x}{x^2-x-2} dx$

e) $\int \frac{x^2+2}{x(x-1)(x+2)} dx$

f) ★ $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$

Zadanie S4. Oblicz całki (ułamki proste II rodzaju):

a) $\int \frac{dx}{x^2+4}$

b) $\int \frac{dx}{x^2-4x+13}$

c) $\int \frac{2x+3}{x^2+4x+8} dx$

d) $\int \frac{3x-2}{x^2+2x+10} dx$

Zadanie S5. Oblicz całki (czynniki liniowe i kwadratowe):

a) $\int \frac{x+1}{x^3+x} dx$

b) $\int \frac{2}{(x-1)(x^2+1)} dx$

c) ★ $\int \frac{x+2}{(x-1)^2(x^2+2)} dx$

Zadanie S6. Oblicz całki z funkcji trygonometrycznych:

a) $\int \sin^2 x dx$

b) $\int \cos^2 x dx$

c) $\int \sin 3x \cos x dx$

d) $\int \sin^3 x dx$

e) $\int \cos^3 x dx$

f) $\int \sin x \sin 2x dx$

g) ★ $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$

📋 **Sprawdź, co umiesz** (ok. 25 minut)

Zadanie T1. Oblicz $\int \frac{x+5}{x^2+x-2} dx$.

Zadanie T2. Oblicz $\int \frac{dx}{x^2+6x+10}$.

Zadanie T3. Oblicz $\int \sin x \cos^2 x dx$.

Odpowiedzi

Zad. S1. a) $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$; b) $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-2}$; c) $\frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+x+1)^2}$; d) $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$, $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+2}$; e) $x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$, $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$.

Zad. S2. a) $1 + \frac{4}{x-3}$, $x+4 \ln|x-3|+C$; b) $x-1 + \frac{2}{x+1}$, $\frac{x^2}{2} - x + 2 \ln|x+1|+C$; c) $x^2+x+1 + \frac{1}{x-1}$, $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1|+C$; d) $x + \frac{x}{x^2+1}$, $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$.

Zad. S3. a) $\frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + C$; b) $5 \ln|x-2| - 4 \ln|x-1| + C$; c) $\frac{14}{5} \ln|x-3| + \frac{11}{5} \ln|x+2| + C$; d) $6 \ln|x-2| + 3 \ln|x+1| + C$; e) $-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2}$, $-\ln|x| + \ln|x-1| + \ln|x+2| + C$; f) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$, $\ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C$.

Zad. S4. a) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$; b) $\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{3} + C$; c) $2x+3 = (2x+4) - 1$, $\ln(x^2+4x+8) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{2} + C$; d) $3x-2 = \frac{3}{2}(2x+2) - 5$, $\frac{3}{2} \ln(x^2+2x+10) - \frac{5}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} + C$.

Zad. S5. a) $\frac{1}{x} + \frac{-x+1}{x^2+1}$, $\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + C$; b) $\frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+1}$, $\ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \operatorname{arctg} x + C$; c) $-\frac{1}{3(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{x-2}{3(x^2+2)}$, $-\frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{6} \ln(x^2+2) - \frac{\sqrt{2}}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C$.

Zad. S6. a) $\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C$; b) $\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C$; c) $-\frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{8} \cos 4x + C$; d) $-\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C$; e) $\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C$; f) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, $\frac{2}{3} \sin^3 x + C$; g) $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4} \sin^2 2x = \frac{1}{8} (1 - \cos 4x)$, $\frac{x}{8} - \frac{1}{32} \sin 4x + C$.

Sprawdź. T1: $\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}$, $2 \ln|x-1| - \ln|x+2| + C$; T2: $(x+3)^2 + 1$, $\operatorname{arctg}(x+3) + C$; T3: $t = \cos x$, $-\frac{1}{3} \cos^3 x + C$.