

Ćwiczenia 11

Macierz odwrotna. Rząd macierzy

Macierz odwrotna – metoda dopełnień i metoda Gaussa–Jordana • równania macierzowe • liniowa niezależność • rząd macierzy. Materiał teoretyczny: streszczenie wykładu 11.

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka • Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

Przypomnienie

A^{-1} istnieje $\iff \det A \neq 0$; $A^{-1} = \frac{1}{\det A} [D_{ij}]^T$; $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$; $[A \mid I] \rightarrow [I \mid A^{-1}]$.
 $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$; $XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}$. $\text{rz } A$ = liczba niezerowych wierszy postaci schodkowej.

Zadania na ćwiczenia

Zadanie 1. Wyznacz macierze odwrotne (o ile istnieją) i wykonaj sprawdzenie:

a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Zadanie 2. Wyznacz macierze odwrotne metodą dopełnień algebraicznych:

a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Zadanie 3. Wyznacz macierz odwrotną metodą Gaussa–Jordana: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Zadanie 4. Rozwiąż równania macierzowe, gdzie $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$:

a) $AX = B$

b) $XA = B$

c) ★ $AX - A = 2X$

Zadanie 5. Wyznacz rząd macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

f) ★ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & x & 2 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$

Zadanie 6. Sprawdź, czy wektory są liniowo niezależne: a) $[1, 2, 1]$, $[2, 1, 1]$, $[1, 1, 2]$; b) $[1, -1, 2]$, $[2, 1, 1]$, $[3, 0, 3]$.

Zadanie 7. (źródła) Stężenia zanieczyszczenia na dwóch stacjach $\mathbf{c}$ [$\mu\text{g}/\text{m}^3$] zależą od emisji dwóch źródeł $\mathbf{q}$ [t/doba] według wzoru $\mathbf{c} = A\mathbf{q}$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 \end{bmatrix}$. Zmierzono $c_1 = 7$, $c_2 = 6$. Wyznacz A^{-1} i emisje obu źródeł.

Zadania do pracy samodzielnej

Zadanie S1. Wyznacz macierze odwrotne: a) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Zadanie S2. Rozwiąż równanie $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Zadanie S3. Wyznacz rząd macierzy $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ oraz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Sprawdź, co umiesz (ok. 20 minut)

Zadanie T1. Wyznacz macierz odwrotną do $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ i wykonaj sprawdzenie.

Zadanie T2. Rozwiąż równanie $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Zadanie T3. Wyznacz rząd macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \end{bmatrix}$.

Odpowiedzi

Zad. 1. a) $\det = 3, \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$; d) $\det = 0$ – nie istnieje.

Zad. 2. a) $\det = -1, A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$; b) $\det = 4, A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Zad. 3. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (np. $W_3 - W_1, W_3 - W_2, W_3 \rightarrow -W_3, W_1 - W_3, W_2 - W_3$).

Zad. 4. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$; a) $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$; b) $X = BA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 11 & -6 \end{bmatrix}$; c) $(A - 2I)X = A, A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$,
 $X = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Zad. 5. a) 1; b) 2; c) 3; d) 2; e) 2; f) $\det = x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$: dla $x \neq 1$ i $x \neq 4$ rząd 3, dla $x = 1$ lub $x = 4$ rząd 2.

Zad. 6. a) rząd macierzy z tych wektorów = 3 – niezależne; b) rząd = 2 – zależne ($[3, 0, 3] = [1, -1, 2] + [2, 1, 1]$).

Zad. 7. $\det A = 0,05, A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, \mathbf{q} = A^{-1}\mathbf{c} = [28 - 12, -14 + 36]^T = [16, 22]^T$ t/doba.

Zad. S1. a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$; b) $\det = 4, \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Zad. S2. $X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$.

Zad. S3. 2 (wiersz 3 = wiersz 1 + wiersz 2); 2 (wiersz 3 = wiersz 1 + wiersz 2).

Sprawdź. T1: $\det = 1, \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$; T2: $X = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$; T3: rz = 2 (wiersz 3 = wiersz 1 + wiersz 2).