

Ćwiczenia 11

Całka oznaczona i jej zastosowania

Twierdzenie Newtona–Leibniza • podstawienie i całkowanie przez części w całce oznaczonej • pola obszarów • objętość bryły obrotowej • zastosowanie w ekoenergetyce.
Czas: 2 h. Materiał teoretyczny: streszczenie wykładu 11.

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka • Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

Przypomnienie

$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$; podstawienie: $\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt$ (zmieniamy granice!);
przez części: $\int_a^b f g' dx = [f g]_a^b - \int_a^b f' g dx$; f nieparzysta: $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$;
pole: $P = \int_a^b |f(x)| dx$, $P = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx$ ($f \leq g$); objętość: $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

Zadania na ćwiczenia

Zadanie 1. Oblicz całki, korzystając z twierdzenia Newtona–Leibniza:

a) $\int_0^2 (3x^2 - 4x + 1) dx$

b) $\int_1^4 \sqrt{x} dx$

c) $\int_0^{\pi/2} \cos x dx$

d) $\int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right) dx$

e) $\int_0^1 e^{2x} dx$

f) $\int_{-1}^1 (x^3 + 5x) dx$

Zadanie 2. Oblicz całki (podstawienie, całkowanie przez części, własności):

a) $\int_0^1 x e^x dx$

b) $\int_0^1 \frac{x-1}{x+1} dx$

c) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2 \sin x dx$

d) $\int_1^e x^2 \ln x dx$

e) $\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{2+4x}} dx$

f) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin 2x}{\cos^3 x} dx$

g) $\int_0^{\sqrt{5}} \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} dx$

Zadanie 3. Wykonaj rysunek i oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi:

a) $y = x^2 - 2x - 8$, $y = 0$

b) $y = -x^2 + 2x + 3$, $y = 0$

c) $y = (x-1)^2 - 1$, $y = 3x$

d) $y = -x^2 - 2x$, $y = x^2 + 4x$

e) $y = x^2$, $y^2 = x$

f) $xy = 4$, $x + y = 5$

g) ★ $4y = x^2$, $y = \frac{8}{x^2 + 4}$

Zadanie 4. Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót wokół osi Ox obszaru pod wykresem funkcji:

a) $y = \sqrt{x}$, $x \in [0, 4]$

b) $y = x^2$, $x \in [0, 1]$

Zadanie 5. (ekoenergetyka) Moc instalacji fotowoltaicznej w słoneczny dzień opisuje wzór $P(t) = 0,1 t (12 - t)$ [kW], gdzie $t \in [0, 12]$ – liczba godzin od wschodu słońca. Oblicz energię wyprodukowaną w ciągu dnia oraz średnią moc instalacji. W której godzinie moc jest równa mocy średniej?

Zadania do pracy samodzielnej

Zadanie S1. Oblicz całki:

a) $\int_0^1 (x^2 + 1)^2 dx$

b) $\int_0^\pi \sin x \cos x dx$

c) $\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx$

d) $\int_1^e \ln x dx$

e) $\int_0^\pi x \sin x dx$

f) ★ $\int_1^2 \frac{dx}{x + x^3}$

Zadanie S2. Wykonaj rysunek i oblicz pole obszaru:

a) trójkąta o wierzchołkach $A(1, 0)$, $B(0, 0)$, $C(1, 1)$ (za pomocą całki)

b) ograniczonego prostymi $y = 2x$, $y = 0$, $y = -2x + 2$

c) ograniczonego krzywą $y = \sin x$ i osią Ox dla $x \in [0, 2\pi]$

d) ★ ograniczonego krzywymi $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = 3x$

Zadanie S3. Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót wokół osi Ox obszaru pod wykresem funkcji $y = \frac{1}{x}$, $x \in [1, 2]$.

Zadanie S4. Sprężynę o współczynniku sprężystości $k = 500$ N/m rozciągnięto o 20 cm. Oblicz wykonaną pracę ($F(x) = kx$).

Sprawdź, co umiesz (ok. 25 minut)

Zadanie T1. Oblicz $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) dx$.

Zadanie T2. Oblicz $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx$.

Zadanie T3. Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi $y = x^2$ i $y = x + 2$.

Zadanie T4. Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót wokół osi Ox obszaru pod prostą $y = x$, $x \in [0, 3]$. Jaką bryłę otrzymujemy?

Odpowiedzi

Zad. 1. a) 2; b) $\frac{14}{3}$; c) 1; d) $\frac{e^2+1}{2}$; e) $\frac{e^2-1}{2}$; f) 0 (funkcja nieparzysta).

Zad. 2. a) 1 (przez części); b) $\frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$, $1 - 2 \ln 2$; c) 0 (funkcja nieparzysta); d) $\frac{2e^3+1}{9}$; e) $t = 2 + 4x$, $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; f) $\frac{\sin 2x}{\cos^3 x} = \frac{2 \sin x}{\cos^2 x}$, $t = \cos x$, $2\sqrt{2} - 2$; g) $t = 4 + x^2$, 1.

Zad. 3. a) $x \in [-2, 4]$, 36; b) $x \in [-1, 3]$, $\frac{32}{3}$; c) $x \in [0, 5]$, $\frac{125}{6}$; d) $x \in [-3, 0]$, 9; e) $x \in [0, 1]$, $\frac{1}{3}$; f) $x \in [1, 4]$, $\int_1^4 (5 - x - \frac{4}{x}) dx = \frac{15}{2} - 8 \ln 2 \approx 1,95$; g) $x \in [-2, 2]$, $2\pi - \frac{4}{3} \approx 4,95$.

Zad. 4. a) 8π ; b) $\frac{\pi}{5}$.

Zad. 5. $E = \int_0^{12} 0,1(12t - t^2) dt = 28,8 \text{ kWh}$; $P_{\text{sr}} = 2,4 \text{ kW}$; $0,1t(12 - t) = 2,4 \Leftrightarrow t^2 - 12t + 24 = 0$, $t = 6 \pm 2\sqrt{3}$, tj. $t \approx 2,54 \text{ h}$ i $t \approx 9,46 \text{ h}$.

Zad. S1. a) $\frac{28}{15}$; b) 0; c) $\frac{1}{2} \ln 2$; d) 1; e) π ; f) $\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$, $\frac{3}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 5 = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{5}$.

Zad. S2. a) $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{2}$; c) 4; d) $\int_0^3 \frac{1}{2} x^2 dx + \int_3^6 (3x - \frac{1}{2} x^2) dx = \frac{9}{2} + 9 = \frac{27}{2}$.

Zad. S3. $V = \pi \int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{2}$.

Zad. S4. $W = \int_0^{0,2} 500x dx = 10 \text{ J}$.

Sprawdź. T1: $\frac{17}{6}$; T2: $t = \cos x$, $\frac{1}{3}$; T3: $x \in [-1, 2]$, $\frac{9}{2}$; T4: 9π – stożek o promieniu 3 i wysokości 3.