

Ćwiczenia 12

Układy równań liniowych

Wzory Cramera • metoda macierzy odwrotnej • metoda eliminacji Gaussa • twierdzenie Kroneckera–Capellego • zadania tekstowe: nawozy, mieszanie wód, zalesianie. Materiał teoretyczny: streszczenie wykładu 12.

Prof. UPP dr hab. Agnieszka Łacka • Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

Przypomnienie

Kronecker–Capelli: rozwiązanie $\iff \text{rz } A = \text{rz}[A \mid B]$; $= n - \text{jedno}$; $= r < n$ – nieskończenie wiele ($n - r$ parametrów).

Cramer ($\det A = W \neq 0$): $x_j = \frac{W_j}{W}$; $X = A^{-1}B$; Gauss: $[A \mid B] \rightarrow$ postać schodkowa $\rightarrow$ podstawianie wstecz.

Zadania na ćwiczenia

Zadanie 1. Rozwiąż układy, stosując wzory Cramera:

a)
$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x + y = 1 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$$

Zadanie 2. Rozwiąż układy metodą macierzy odwrotnej:

a)
$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 5x + 3y = 7 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + z = 2 \\ y + z = 3 \\ x + y + z = 4 \end{cases} \quad (\text{ćw. 11, zad. 3})$$

Zadanie 3. Rozwiąż układy metodą eliminacji Gaussa:

a)
$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + 3z = 7 \\ 3x + y + z = 7 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

Zadanie 4. Korzystając z twierdzenia Kroneckera–Capellego, zbadaj liczbę rozwiązań układu i rozwiąż go (metodą Gaussa):

a)
$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - 3y + 4z = 4 \\ 3x - 5y + 5z = 5 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - 3y + 4z = 4 \\ 3x - 5y + 5z = 6 \end{cases}$$

Zadanie 5. ★ Dla jakiej wartości a układ $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + ay = 3 \end{cases}$ jest sprzeczny? Rozwiąż go dla $a = 3$.

Zadanie 6. (nawozy) Działka wymaga 6 kg azotu i 9 kg fosforu. Nawóz A zawiera 10% N i 30% P, a nawóz B – 20% N i 10% P. Ile kilogramów każdego nawozu należy wysiać?

Zadanie 7. (mieszanie) Woda z ujęcia 1 zawiera 80 mg/l azotanów, a z ujęcia 2 – 20 mg/l. Ile m^3 wody z każdego ujęcia należy zmieszać, aby otrzymać $600 m^3$ wody o stężeniu 40 mg/l?

Zadanie 8. (źródła) Stężenie chlorków w wodzie opadowej wynosi 20 mg/l, a w wodach gruntowych 80 mg/l. W potoku, zasilanym tylko przez te dwa źródła, zmierzono 44 mg/l. Jaki jest udział każdego źródła w przepływie potoku?

Zadania do pracy samodzielnej

Zadanie S1. Rozwiąż układ metodą Cramera i metodą Gaussa: $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x + 3y - z = -2 \\ 3x - y + 2z = 9 \end{cases}$.

Zadanie S2. Zbadaj, czy układ $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 3y + z = 6 \\ 3x + 4y + 2z = 9 \end{cases}$ jest oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny, i wyznacz jego rozwiązania.

Zadanie S3. (zalesianie) Na zalesienie zakupiono 1000 sadzonek sosny, buka i dębu w cenach 2, 5 i 8 zł za sztukę, płacąc 4700 zł. Sadzonek buka kupiono tyle samo co dębu. Ile kupiono sadzonek każdego gatunku?

Sprawdź, co umiesz (ok. 25 minut)

Zadanie T1. Rozwiąż metodą Cramera: $\begin{cases} 4x - y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$.

Zadanie T2. Rozwiąż metodą Gaussa: $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 2x + y + z = 4 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$.

Zadanie T3. Ile litrów roztworu 10% i 40% należy zmieszać, aby otrzymać 30 litrów roztworu 20%?

Odpowiedzi

Zad. 1. a) $W = -5$, $W_x = -5$, $W_y = -10$: $(1, 2)$; b) $W = 14$, $W_x = 7$, $W_y = -14$: $(\frac{1}{2}, -1)$; c) $W = -9$, $W_1 = -9$, $W_2 = -18$, $W_3 = -27$: $(1, 2, 3)$.

Zad. 2. a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$, $(x, y) = (2, -1)$; b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $(x, y, z) = (1, 2, 1)$.

Zad. 3. a) $(2, 0, 1)$; b) $(1, 2, -1, 3)$.

Zad. 4. a) $\text{rz } A = \text{rz}[A \mid B] = 2 < 3$ – nieoznaczony: $(x, y, z) = (5 - 5t, 2 - 2t, t)$, $t \in \mathbb{R}$; b) $\text{rz } A = 2 \neq \text{rz}[A \mid B] = 3$ – sprzeczny.

Zad. 5. $W = a - 2$; dla $a = 2$: $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = \frac{3}{2} \end{cases}$ – sprzeczny; dla $a = 3$: $W = 1$, $(x, y) = (0, 1)$.

Zad. 6. $\begin{cases} 0,1a + 0,2b = 6 \\ 0,3a + 0,1b = 9 \end{cases} : a = 24 \text{ kg}, b = 18 \text{ kg}.$

Zad. 7. $\begin{cases} x + y = 600 \\ 80x + 20y = 24\,000 \end{cases} : x = 200 \text{ m}^3, y = 400 \text{ m}^3.$

Zad. 8. $\begin{cases} x + y = 1 \\ 20x + 80y = 44 \end{cases} : y = 0,4, x = 0,6$ – 60% woda opadowa, 40% wody gruntowe.

Zad. S1. $W = -5$; $(x, y, z) = (2, -1, 1)$.

Zad. S2. nieoznaczony ($\text{rz} = 2$): $(3 - 2t, t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Zad. S3. $\begin{cases} x + y + z = 1000 \\ 2x + 5y + 8z = 4700 \\ y = z \end{cases} : 400 \text{ sosen, } 300 \text{ buków, } 300 \text{ dębów}.$

Sprawdź. T1: $W = 9$, $W_x = 18$, $W_y = 9$: $(2, 1)$; T2: $(1, 1, 1)$; T3: $\begin{cases} x + y = 30 \\ 0,1x + 0,4y = 6 \end{cases} : 20 \text{ l roztworu } 10\% \text{ i } 10 \text{ l roztworu } 40\%.$